

Dynamik geophysikalischer Flüssigkeiten
Vorlesung im WS 95/96

Hans-Peter Plag
Institut für Geophysik
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbemerkungen	i
1.1	Anmerkungen zum Aufbau der Vorlesung	i
1.2	Literatur zur Vorlesung	iii
2	Mathematische Vorbemerkungen	1
2.1	Vektoren	1
2.2	Dyaden und Tensoren höherer Stufe	1
2.3	Tensoren als lineare Operatoren	3
2.4	Eigenwerte und -vektoren und Hauptachsen eines Tensors	4
2.5	Allgemeinere Definition von Tensoren	5
2.6	Tensoralgebra	8
2.7	Der Metriktensor	9
2.8	Die Christoffel-Symbole und die Christoffelschen Formeln	12
2.9	Kovariante Differentiation	14
2.10	Ableitung der Basisvektoren	16
2.11	Basisvektoren	18
2.12	Ableitung der Basisvektoren und Christoffel-Symbole	21
2.13	Kovariante Ableitung	23
2.14	Physikalische Komponenten eines Vektors	23
2.15	Divergenz und Rotation in Kugelkoordinaten	24
2.16	Der verallgemeinerte δ - und ϵ -Tensor	26

3	Der Verzerrungszustand	27
3.1	Zugangsweisen zu Theorie deformierbarer Medien	27
3.2	Grundlegende Begriffe	28
3.3	Eulersche und Lagrangesche Koordinaten	30
3.4	Ableitungen nach der Zeit	32
3.5	Der Verschiebungsvektor und der Deformationsgradient	33
3.6	Der Verzerrungstensor	35
3.7	Infinitesimale Verzerrungstensoren	37
3.8	Kompatibilitätsbedingungen für den Verzerrungstensor	38
3.9	Andere Definitionen des Verzerrungstensors	39
4	Der Spannungszustand	41
4.1	Die Kräfte am Kontinuum	41
4.2	Der Spannungstensor	42
4.3	Das Reynoldsche Transporttheorem	43
4.4	Feldgleichungen des deformierbaren Mediums	45
4.5	Piola-Kirchhoff Spannungstensoren	47
5	Stoffgesetze	51
5.1	Allgemeine Materialgleichung	51
5.2	Elastische Materialien	52
5.3	Das Hookesche Gesetz	54
5.4	Lineare viskoelastische Materialgleichungen	56
5.5	Stokessches Fluid	57
6	Thermodynamik	63
7	Ausgewählte Themen zur Dynamik des Ozeans	65
7.1	Zur geophysikalischen Bedeutung des Ozeans	65
7.2	Der Einfluß der Erdrotation auf die Dynamik des Ozeans	65
7.3	Eigenmoden des Ozeans	67
7.4	Rotation des Systems feste Erde/Ozean	68
8	Konvektion im Erdmantel	69

Kapitel 1

Vorbemerkungen

1.1 Anmerkungen zum Aufbau der Vorlesung

Die Dynamik von Flüssigkeiten ist in vielen Bereichen der Geophysik von Bedeutung. Mit ihr lassen sich nicht nur Vorgänge in großen Teilen der Hydrosphäre (Ozean, Seen) weitgehend beschreiben. Auch eine Vielzahl der Phänomene in der Atmosphäre sind als Eigenschaften einer Flüssigkeit darstellbar. Unter Hinzunahme thermodynamischer Beziehungen werden auch konvektive Prozesse im Erdmantel zugänglich.

In den meisten Darstellungen der „geophysical fluid dynamics“ wird von Konzepten und Prinzipien ausgegangen, die aufgrund einfacher Modelle studiert wurden, und die dann intuitive auf zunehmend komplexere Modelle übertragen werden. In der Vorlesung soll ein anderer Weg gewählt werden, bei dem von den allgemeinen Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik ausgegangen und die Dynamik von Flüssigkeiten als in diese Theorie eingebetteter Spezialfall dargestellt wird. Diese Vorgehensweise hat insbesondere bei der Betrachtung der Konvektion den Vorteil, die Beziehungen zur Elastizitätstheorie und Rheologie deutlich werden zu lassen; eine im Hinblick auf allgemeinere Modelle für die Prozesse im Erdmantel wichtige Voraussetzung.

Im Rahmen der Vorlesung „Dynamik geophysikalischer Flüssigkeiten“ werden also zunächst die theoretischen Grundlagen der Kontinuumsmechanik dargestellt. Erstes Ziel ist, die Gleichungen

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} + K_i &= \rho \frac{D^2 u_i}{Dt^2} \\ \gamma_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j} \\ \sigma_{ij} &= f_{ij}(F_{11}, \dots, F_{33})\end{aligned}$$

zu verstehen. Ohne näher auf die Bedeutung der Symbole in diesen Gleichungen einzugehen soll noch folgendes angemerkt werden: Bei den ersten drei Gleichungen (erste Zeile) handelt es sich um die Bewegungsgleichungen, die sich aus der Impulsbilanz ergeben. Die zweite Zeile gibt sechs geometrische Gleichungen an und verknüpft die Verformung mit den Verschiebungen. In der letzten Zeile werden sechs physikalische Materialgleichungen angegeben, die die Spannungen als Funktionen des Deformationsgradienten F_{kl} ausdrücken. Zusätzlich zu diesen insgesamt 15 Gleichungen werden zur vollständigen Beschreibung eines Problems noch Randbedingungen benötigt. Bei der Beschreibung von Flüssigkeiten werden wir zusätzlich eine Zustandsgleichung

benötigen, die die Dichte als Funktion von Zustandsvariablen angibt. Wollen wir thermische Kräfte berücksichtigen, wie dies bei der Betrachtung der Konvektion erforderlich ist, so wird uns die Energiebilanz als Ausgangspunkt dienen.

Um diese Gleichungen zu verstehen, werden zuerst einige mathematische Vorbereitungen erforderlich sein. Hierbei kommt insbesondere der Tensorrechnung und der damit möglichen einfachen und eleganten Indexschreibweise eine Bedeutung zu (Kap. 1). Um die physikalischen Grundlagen der Gleichungen zu verstehen, werden wir uns im Anschluß daran zuerst den Verzerrungszustand aus unterschiedlichen Betrachtungsweisen heraus anschauen. Die Diskussion des Spannungszustands ermöglicht uns dann, die Bewegungsgleichungen zu verstehen. Bei der Behandlung der Stoffgesetze werden thermodynamische Überlegungen wichtige Einsichten liefern.

Zur Vorbereitung der Lösung eines konkreten Problems werden wir die drei Gleichgewichtsbedingungen nur durch die Verschiebungen (u_i) bzw. die Geschwindigkeiten (v_i) ausdrücken und dabei auch tiefere Einsichten in die physikalische Bedeutung der einzelnen Terme in diesen Gleichungen gewinnen. Im nächsten Schritt wollen wir die gewonnenen Gleichungen auf den Fall einer Flüssigkeit spezialisieren. Hierbei wird eine Diskussion der Kräfte K_i , die in einem Medium wirken können, erforderlich sein. Wir werden dann die Gleichgewichtsbedingungen unter verschiedenen Annahmen in bezug auf die K_i und die Randbedingungen mit verschiedenen Lösungsansätzen lösen.

In diesem ersten Teil der Vorlesung wird besonderer Wert auf die Darstellung der Theorie in ihrer Beziehung zur Geophysik gelegt, d.h. es wird keine vollständige Beschreibung aller Phänomene angestrebt, wie dies in der Meteorologie oder Ozeanographie sinnvoll ist. Wichtig erscheint hier vielmehr die Beziehung zwischen Elastizitätstheorie und Rheologie und dem Übergang zu einer Flüssigkeit darzustellen.

Die o.a. Gleichungen sind in ihrer Allgemeinheit oft nicht direkt auf die Beschreibung von Bewegungen innerhalb von Flüssigkeiten anwendbar. Deshalb sind wichtige Begriffe zur Charakterisierung verschiedener Bewegungssituationen erforderlich, die mögliche Spezialisierungen und Vereinfachungen zulassen. Betrachtet man den Umfang der Thematik, so ist klar, daß im Rahmen einer einsemestrigen Vorlesung nur eine kleine Auswahl von möglichen Themen angesprochen werden kann. Als Kriterium für die Wahl der Beispiele wurde hier ihre Bedeutung für die andere Bereiche der Geophysik zugrundegelegt. Der Ozean beeinflusst in einem weiten Frequenzbereich von Gezeitenperioden bis hin zu Kilojahren geodynamische Vorgänge wie z.B. Erdbeben, exogene Deformationen der Erde, Polbewegung und Tageslängenschwankungen und somit die entsprechenden Messgrößen. Zunächst sollen die wesentlichen Konzepte anhand ruhender Flüssigkeiten im stabilen Zustand eingeführt und bei der Diskussion von Stabilitätsproblemen erweitert werden. Die Beschreibung des Ozeans auf einer rotierenden Erde dient als Beispiel, um den Einfluß der Erdrotation auf die dynamischen Eigenschaften eines fluiden Systems in eindrucksvoller Weise zu belegen.

Nahezu alle Oberflächeneigenschaften der Erde werden von konvektiven Vorgängen im Erdmantel beeinflusst. Den Abschluß der Vorlesung wird deshalb die Betrachtung der Konvektion im Erdmantel als zweite Anwendung der Theorie bilden. Vorangestellt werden hier die notwendigen thermodynamischen Grundlagen, die uns auf die Zustandsgleichungen und Transportprobleme führen. Neben den zur Modellierung der Konvektion üblichen Ansätzen werden auch die beobachtbaren Auswirkungen einer Konvektion im Erdmantel ebenso wie die aus heute existierenden Modellen ableitbaren Konsequenzen und die noch offenen Fragen zur Sprache kommen.

1.2 Literatur zur Vorlesung

Die Bücher sind in alphabetischer Reihenfolge angegeben.

I. Grundlagen

Becker, E., und Bürger, W., 1975: Kontinuumsmechanik. Teubner Studienbücher Mechanik. B.G. Teubner, Stuttgart.

Bertram, A., 1989: Axiomatische Einführung in die Kontinuumsmechanik. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim.

Chung, T.J., 1988: Continuum Mechanics. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Klingbeil, E., 1966: Tensorrechnung für Ingenieure. B.I.-Hochschultaschenbuch Band 197, B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim.

Landau, Lifschitz, 1983: Lehrbuch der theoretischen Physik, Band VII: Elastizitätstheorie.

Leipholtz, H., 1968: Einführung in die Elastizitätstheorie. Wissenschaft und Technik, Taschenausgaben, G. Braun, Karlsruhe.

II. Dynamik von Flüssigkeiten

Anderson, D.L., 1989: Theory of the Earth. Blackwell London.

Gill, A.E., 1982: Atmosphere-Ocean Dynamics. Academic Press, New York.

Pedlosky, J., 1979: Geophysical Fluid Dynamics. Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin.

Peltier, W.R. (ed.), 1989: Mantle Convection - Plate Tectonics and Global Dynamics. Gordon and Breach Science Publishers, New York.

Turcotte, D.L. and Schubert, G., 1982: Geodynamics - Applications of Continuum Physics to Geological Problems. John Wiley & Sons, New York.

III. Rheologie

Lliboutry, L.A., 1987: Very Slow Flows of Solids. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht.

Ranally, G., 1987: Rheology of the Earth. Allen & Unwin, Boston.

Kapitel 2

Mathematische Vorbemerkungen

2.1 Vektoren

Wir geben hier eine auf den \mathbb{R}^3 eingeschränkte Definition von Vektoren. Dazu betrachten wir ein Zahlentripel (A_1, A_2, A_3) , für das wir auch A_i , $i = 1, 2, 3$ oder auch nur A_i schreiben. Wir werden einen Vektor über seine Transformationseigenschaften beim Übergang von einem kartesischen Koordinatensystem zu einem anderen definieren.

Vektoren sind geordnete Zahlentripel mit den Komponenten A_i , $i = 1, 2, 3$, bezüglich des kartesischen Achsenkreuzes x_i , $i = 1, 2, 3$, und den Komponenten A'_i , $i = 1, 2, 3$, bezüglich des gedrehten Systems x'_i , $i = 1, 2, 3$, wobei zwischen den Komponenten A_i und A'_i die Transformationsformeln

$$A'_i = a_{ij}A_j, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

und

$$A_i = a_{ji}A'_j, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

bestehen (s. Leipholz, S. 4). Dabei sind die $a_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$, d.h. der Cosinus des Winkels zwischen den Koordinatenachsen.

Bei den Gleichungen (2.1) und (2.2) wurde die Einsteinsche Summationsvereinbarung angewendet, die besagt, daß in Produkten bzw. bei Tensoren über wiederholte Indizes (hier jeweils der Index j auf den rechten Seiten) summiert werden soll. Im folgenden wird diese Vereinbarung immer angewendet. Soll über einen wiederholten Index nicht summiert werden, so wird dies ausdrücklich erwähnt, oder ein Index wird eingeklammert.

Wenn lateinische Buchstaben als Indizes verwendet werden, so laufen diese immer von 1 bis 3. In allen anderen Fällen werden griechische Buchstaben als Indizes benutzt.

2.2 Dyaden und Tensoren höherer Stufe

Seien u_i und v_i , $i = 1, 2, 3$ Vektoren. Dann ist die Matrix mit den Elementen $t_{ij} = u_i v_j$ das dyadische Produkt von u_i und v_i . Die Matrix $T = (t_{ij})$ wird als Dyade bezeichnet.

t_{ij} transformiert sich mit

$$t_{ij} = a_{ki} a_{lj} t'_{kl} \quad (2.3)$$

und

$$t'_{ij} = a_{ik}a_{jl}t_{kl}, \quad (2.4)$$

was sich direkt aus den Vektoreigenschaften von u_i und v_i ergibt.

Allgemeiner können wir definieren:

Eine Größe n-ter Stufe aus dem \mathbb{R}^3 mit 3^n Komponenten ist ein kartesischer Tensor n-ter Stufe, wenn sie sich mit

$$t_{ijk\dots n} = a_{oi}a_{pj}a_{qk}\dots a_{nu}t'_{opq\dots u} \quad (2.5)$$

und

$$t'_{ijk\dots n} = a_{io}a_{jp}a_{kq}\dots a_{nu}t_{opq\dots u} \quad (2.6)$$

transformiert, wobei die $t_{ijk\dots n}$ die Komponenten im ungestrichen System x , $i = 1, 2, 3$ und $t'_{ijk\dots n}$ die Komponenten bezüglich dem gestrichen System x' , $i = 1, 2, 3$ sind.

Zwei wichtige Begriffe im Zusammenhang mit Tensoren sollen für Tensoren zweiter Stufe eingeführt werden:

Ein Tensor zweiter Stufe t_{ij} ist symmetrisch, wenn für alle Elemente gilt $t_{ij} = t_{ji}$. Gilt dagegen für alle Elemente $t_{ij} = -t_{ji}$, so ist der Tensor antisymmetrisch.

Damit kann jeder Tensor zweiter Stufe mittels

$$t_{ij} = \frac{1}{2}(t_{ij} + t_{ji}) + \frac{1}{2}(t_{ij} - t_{ji}) \quad (2.7)$$

in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil zerlegt werden.

Zwei wichtige Tensoren sind der sog. δ -Tensor mit

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : \text{ falls } i=j \\ 0 & : \text{ sonst} \end{cases} \quad (2.8)$$

und der ϵ -Tensor mit

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & : \text{ falls } ijk \text{ eine gerade Permutation von } 1,2,3 \text{ ist} \\ -1 & : \text{ falls } ijk \text{ eine ungerade Permutation von } 1,2,3 \text{ ist} \\ 0 & : \text{ wenn zwei Indizes gleich sind} \end{cases} \quad (2.9)$$

Insbesondere bei der Verwendung des δ -Tensors kann es zu Verwechslungen mit dem Kronecker-Symbols kommen, das ein Skalar ist und über

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : \text{ falls } i=j \\ 0 & : \text{ } i \neq j \end{cases} \quad (2.10)$$

definiert ist. So ist für den δ -Tensor $\delta_{ii} = 3$ (unter Beachtung der Summationsvereinbarung) während für das Kronecker-Symbol $\delta_{ii} = 1$ ist (mit z.B. $i=2$). Die Elemente des δ -Tensors sind also über das Kronecker-Symbol definiert.

Wir wollen jetzt eine wichtige Eigenschaft der Transformationsmatrix kennenlernen: Seien x_i und x'_i , $i = 1, 2, 3$ zwei gegeneinander gedrehte karthetische Koordinatensysteme mit den zugehörigen Einheitsvektoren e_i und e'_i , $i = 1, 2, 3$. Dann gilt offensichtlich

$$e'_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) \quad (2.11)$$

wobei die $a_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$, d.h. die Richtungscosinus sind. Es folgt sofort

$$e_i e_j = a_{ik} a_{kj} = \delta_{ij}. \quad (2.12)$$

Durch den Übergang zu den gestrichenen Größen ist leicht zu sehen, daß gilt

$$a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} = a_{ki} a_{kj}. \quad (2.13)$$

Multipliziert man nun die Transformationsmatrix (a_{ij}) mit ihrer Transponierten (a_{ji}) so ergibt sich

$$(a_{ij})(a_{ji}) = (a_{ik} a_{jk}) = \delta_{ij}, \quad (2.14)$$

d.h. das Ergebnis ist der Einheitstensor (bzw. die Einheitsmatrix). Bildet man nun auf beiden Seiten von (2.14) die Determinante

$$\det(a_{ij}) \cdot \det(a_{ji}) = \det(\delta_{ij}), \quad (2.15)$$

so folgt wegen $\det(a_{ij}) = \det(a_{ji})$ und wegen $\det(\delta_{ij}) = 1$

$$[\det(a_{ij})]^2 = 1 \quad (2.16)$$

und bei Beschränkung auf karthesische Rechtssysteme

$$\det(a_{ij}) = 1. \quad (2.17)$$

2.3 Tensoren als lineare Operatoren

Schauen wir uns für den Tensor t_{ij} und den Vektor A_i

$$C_i = t_{ij} A_j \quad (2.18)$$

an. Wir können sagen, daß der Tensor t_{ij} als Operator auf den Vektor A_i wirkt und den Vektor C_i erzeugt. In Matrixschreibweise lautet (2.18)

$$TA = C \quad (2.19)$$

Es ist offensichtlich, daß für jeden Vektor A gilt

$$\delta A = A. \quad (2.20)$$

Es gelten die Rechenregeln für lineare Operatoren

$$T(A + B) = TA + TB \quad (2.21)$$

$$T(mA) = mTA \quad (2.22)$$

wobei A und B Vektoren sind und m ein Skalar ist.

Eine andere Auffassung läßt uns (2.18) als Tensormultiplikation verstehen, bei der zusätzlich eine Überschiebung erfolgt. Eine Überschiebung liegt vor, wenn bei einer Tensormultiplikation zwei Indizes, die unterschiedlichen Faktoren angehören, gleichgesetzt werden. Einfachstes Beispiel für eine Überschiebung ist das Skalarprodukt zweier Vektoren A und B

$$A \cdot B = A_i B_i,$$

dessen Ergebnis bekanntlich ein Skalar ist.

2.4 Eigenwerte und -vektoren und Hauptachsen eines Tensors

Sei T ein Tensor zweiter Stufe und A ein Vektor mit

$$TA = \lambda A \quad t_{ij}A_j = \lambda A_i, \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.23)$$

(Die Gleichungen (2.23) bis (2.25) werden beispielhaft sowohl symbolisch als auch in Indexschreibweise angegeben.) Wegen (2.20) können wir A durch δA ersetzen:

$$TA = \lambda \delta A \quad t_{ij}A_j = \lambda \delta_{ij}A_j \quad (2.24)$$

d.h.

$$(T - \lambda \delta)A = 0 \quad (t_{ij} - \lambda \delta_{ij})A_j = 0 \quad (2.25)$$

Führen wir nun den Einheitsvektor $l = A/\|A\|$ ein und bezeichnen seine Komponenten mit $l_i = A_i/\|A\|$, so folgt durch Division der Gleichungen (2.25) durch $\|A\|$

$$(t_{ij} - \lambda \delta_{ij})l_j = 0. \quad (2.26)$$

Das homogene lineare Gleichungssystem (2.26) hat nur dann eine nicht-triviale Lösung für die l_i , $i = 1, 2, 3$, wenn gilt

$$\det(t_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0. \quad (2.27)$$

Durch Ausrechnen dieser Determinante ergibt sich das charakteristische Polynom des Tensors t_{ij} zu

$$\lambda^3 - J_1 \lambda^2 + J_2 \lambda - J_3 = 0 \quad (2.28)$$

mit

$$J_1 = t_{ii} \quad (2.29)$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(t_{ii}t_{jj} - t_{ij}t_{ji}) \quad (2.30)$$

$$J_3 = \epsilon_{ijk}t_{i1}t_{j2}t_{k3}. \quad (2.31)$$

Die Wurzeln $\lambda^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, des Polynoms (2.28) sind die Eigenwerte des Tensors. Die Koeffizienten des Polynoms sind invariant gegen Koordinatentransformationen, d.h. sie stellen die Invarianten eines Tensors dar. J_1 wird dabei als die Spur des Tensors bezeichnet. Diese Größe entsteht durch eine sogenannte Verjüngung, d.h. es werden zwei Indizes gleichgesetzt (Summation!) und dadurch die Stufe des Tensors um zwei erniedrigt.

Für einen symmetrischen Tensor sind die Wurzeln des Polynoms immer reell. Kennt man alle $\lambda^{(k)}$, so kann man aus

$$(t_{ij} - \lambda^{(k)} \delta_{ij})l_j^{(k)} = 0 \quad (2.32)$$

unter zur Hilfenahme von $l_j^{(k)}l_j^{(k)} = 1$ (was klar ist, weil die l_j Richtungskosinus sind) für jedes $\lambda^{(k)}$ ein Tripel $l_j^{(k)}$, $j = 1, 2, 3$, bestimmen. Diese drei Eigenvektoren oder auch Eigenrichtungen

des Tensors sind für symmetrische Tensoren orthogonal und bilden das Hauptachsensystem des Tensors. Im Hauptachsensystem hat der Tensor die einfache Darstellung

$$t_{ij} = \begin{cases} \lambda^{(i)} & : & \text{falls } i=j \\ 0 & : & \text{sonst} \end{cases} . \quad (2.33)$$

Nicht in allen Fällen sind alle $\lambda^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$ voneinander verschieden. Sind zwei $\lambda^{(k)}$ gleich, so gibt es nur eine ausgezeichnete Hauptachse, während die beiden anderen Achsen nicht eindeutig festgelegt sind, d.h. jedes um die ausgezeichnete Hauptachse gedrehte orthogonale Rechtssystem ist Hauptachsensystem. Sind alle drei $\lambda^{(k)}$ gleich, so ist jedes beliebige orthogonale Rechtssystem Hauptachsensystem.

2.5 Allgemeinere Definition von Tensoren

In den vorangegangenen Abschnitten wurde Vektoren und Tensoren ausschließlich im \mathbb{R}^3 betrachtet. Um zu einer allgemeinen Definition von Tensoren zu kommen, werden wir allgemeinere Räume betrachten. Dazu werden wir uns nicht auf dreidimensionale Räume beschränken, sondern auch n-dimensionale Räume zulassen. Bei diesen Räumen kann es sich um affine oder metrische Räume handeln.

Zur Erinnerung:

Sei K ein Körper und seien a, b und c Elemente (Vektoren) aus dem K^n sowie α und β Elemente (Skalare) aus K . Es gelte für die komponentenweise definierte Operation $+$ (Vektoraddition)

- a) $a + b = b + a$
- b) $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$
- c) **Es gibt einen Nullvektor 0 , so daß $a + 0 = a$**

und für die ebenfalls komponentenweise definierte Operation \cdot (Skalarmultiplikation) zwischen einem Vektor und einem Skalar (wobei der Punkt oft weggelassen wird)

- a) $1 \cdot a = a$
- b) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a = \alpha\beta a$
- c) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
- d) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$.

Einen solchen Raum bezeichnet man als **affinen Raum**.

Ist darüber hinaus ein Skalarprodukt $\langle \dots \rangle$ definiert mit

- a) $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$
- b) $\langle \alpha a, b \rangle = \langle a, \alpha b \rangle = \alpha \langle a, b \rangle$
- c) $\langle a, b + c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$
- d) **Aus $\langle a, b \rangle = 0$ für beliebige b folgt $a = 0$,**

so heißt der Raum **euklidischer Raum**. Jedes Skalarprodukt induziert eine Norm; jede Norm wiederum eine Metrik. Damit sind die letzteren auch metrische Räume.

Wir werden meist den \mathbb{R}^n betrachten.

Bisher haben wir nur kartesische Koordinaten betrachtet. Ab jetzt wollen wir auch krummlinige Koordinaten zulassen. Dazu müssen wir uns Transformationen zwischen solchen Koordinatensystemen anschauen.

Seien x^i , $i = 1, 2, \dots, n$ und y^i , $i = 1, 2, \dots, n$ zwei unterschiedliche krummlinige Koordinatensysteme. Der Übergang vom x -System in das y -System sei durch eine Transformations-Vorschrift festgelegt. Wir wollen uns nur mit zulässigen Transformationen befassen. Dazu die folgende Definition:

Eine Transformation

$$y^i = y^i(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.34)$$

heißt zulässig, wenn die Vorschrift (2.34) bijektiv ist, d.h. die Umkehrung

$$x^i = x^i(y^1, y^2, \dots, y^n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.35)$$

existiert, wenn alle y^i einmal stetig differenzierbar sind (also alle $y^i \in C^1$) und wenn die Jacobische Determinante

$$J = \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) \quad (2.36)$$

überall existiert und verschieden von Null ist.

In der Praxis betrachtet man Transformationen, die bis auf isolierte Punkte oder Linien zulässig sind. Für (2.34) schreiben wir oft kurz $y^i = y^i(x)$ und analog für (2.35) $x^i = x^i(y)$.

Wir wollen uns nun ein Eigenschaften der Jacobischen Determinante anschauen: Dazu betrachten wir die Identität

$$y^i = y^i(x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, \dots, y^n)). \quad (2.37)$$

Dann gilt

$$\frac{\partial y^i}{\partial y^j} = \delta_{ij} = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j} \quad (2.38)$$

wobei hier über α von 1 bis n summiert wird. Bildet man auf beiden Seiten die Determinante, so ergibt sich

$$\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j}\right) \equiv \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}\right) \cdot \det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j}\right) = \det(\delta_{ij}) = 1 \quad (2.39)$$

Wegen

$$\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}\right) = J, \quad \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\right) = J^{-1} \quad (2.40)$$

können wir aus (2.39) sofort die wichtige Beziehung zwischen der Jacobischen Determinanten einer zulässigen Transformation und ihrer Inversen ablesen:

$$J \cdot J^{-1} = 1. \quad (2.41)$$

Im folgenden werden wir zwei wichtige Transformationsgesetze kennenlernen, die uns dann erlauben eine allgemeine Definition von Tensoren zu geben. Zur Motivation betrachten wir diese

beiden Transformationen für Vektoren A_i und B_i . Sei also die Transformation der Koordinaten durch die zulässige Transformation $x^i = x^i(y)$ gegeben. Dann bezeichnet man

$$B_i(y) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} A_\alpha(x) \quad (2.42)$$

als kovariante Transformation, wobei $A_i(x)$ die kovarianten Komponenten von A im x -System und $B_i(y)$ die kovarianten Komponenten von B im y -System sind. Wir bezeichnen $A_i(x)$ auch kurz als kovarianten Vektor. In analoger Weise bezeichnet man

$$B^i(y) = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} A^\alpha(x) \quad (2.43)$$

als kontravariante Transformation und die $A^i(x)$ als kontravariante Komponenten von A im x -System bzw. $B^i(y)$ als kontravariante Komponenten von B im y -System. Den Zusammenhang zwischen ko- und kontravarianten Komponenten eines Vektors werden wir später kennenlernen.

Betrachten wir zwei Beispiel. Für den Gradienten einer Funktion $f(x^k)$

$$\frac{\partial f}{\partial x^k}$$

liefert die Kettenregel der Differentiation die Transformationsformel

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}, \quad (2.44)$$

welche zeigt, daß sich der Gradient nach der kovarianten Transformationsformel (2.42) transformiert.

Betrachten wir dagegen die Differentiale dx^k , so gilt

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha, \quad (2.45)$$

was dem kontravarianten Gesetz (2.43) entspricht.

Wir geben jetzt die (für uns) allgemeinste Definition eines Tensors:

Eine geordnete Menge von $n^{(r+s)}$ Größen

$$A_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}(x)$$

die bezüglich des x -Systems gegeben seien, stellt dann die Komponentenmenge eines gemischten Tensors, der kovariant von der Stufe r und kontravariant von der Stufe s ist, dar, wenn die entsprechende, bezüglich des y -Systems gegebene Menge

$$B_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}(y)$$

mit der ersten Menge durch die Transformationsformel

$$B_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}(y) = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{i_1}} \frac{\partial x^{\alpha_2}}{\partial y^{i_2}} \cdots \frac{\partial x^{\alpha_r}}{\partial y^{i_r}} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}} \frac{\partial y^{j_2}}{\partial x^{\beta_2}} \cdots \frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{\beta_s}} A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}(x) \quad (2.46)$$

verknüpft ist. Ist $s = 0$, so sprechen wir von einem kovarianten, ist $r = 0$ von einem kontravarianten Tensor.

2.6 Tensoralgebra

Für Tensoren gleichen Typs und der gleichen Stufe lassen sich Addition und Subtraktion wie folgt definieren. Gegeben seien zwei Tensoren

$$B_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}(y) = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{i_1}} \frac{\partial x^{\alpha_2}}{\partial y^{i_2}} \cdots \frac{\partial x^{\alpha_r}}{\partial y^{i_r}} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}} \frac{\partial y^{j_2}}{\partial x^{\beta_2}} \cdots \frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{\beta_s}} A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}(x) \quad (2.47)$$

und

$$\tilde{B}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}(y) = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{i_1}} \frac{\partial x^{\alpha_2}}{\partial y^{i_2}} \cdots \frac{\partial x^{\alpha_r}}{\partial y^{i_r}} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}} \frac{\partial y^{j_2}}{\partial x^{\beta_2}} \cdots \frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{\beta_s}} \tilde{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}(x). \quad (2.48)$$

Dann ist durch

$$B_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \pm \tilde{B}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{\alpha_r}}{\partial y^{i_r}} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{\beta_s}} (A_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\beta_1 \dots \beta_s} \pm \tilde{A}_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\beta_1 \dots \beta_s}) \quad (2.49)$$

die Addition bzw. Subtraktion definiert. Das tensorielle Produkt für zwei Tensoren

$$\tilde{B}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \quad \text{und} \quad B_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p}$$

ist durch

$$\hat{B}_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_r}^{j_1 \dots j_q l_1 \dots l_s} = B_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \tilde{B}_{k_1 \dots k_r}^{l_1 \dots l_s} \quad (2.50)$$

definiert, wobei das Ergebnis ein Tensor ist, der kovariant von der Stufe $p+r$ und kontravariant von der Stufe $q+s$ ist.

Die Verjüngung eines Tensors besteht im Gleichsetzen zweier Indizes. Die dadurch erzwungene Summation erniedrigt die Stufe des Tensor um zwei; d.h. der Tensor wird um zwei Stufen „verjüngt“. Ist z.B. der Tensor

$$B_{jk}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \frac{\partial x^\gamma}{\partial y^k} A_{\beta\gamma}^\alpha \quad (2.51)$$

gegeben, dann führt das Gleichsetzen von z.B. i und k zu

$$B_{ji}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \frac{\partial x^\gamma}{\partial y^i} A_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \delta_\alpha^\gamma A_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} A_{\beta\alpha}^\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \tilde{A}_\beta \quad (2.52)$$

d.h. das Gleichsetzen des kontravarianten Index i mit dem kovarianten Index k führt zu einer Erniedrigung von sowohl der kovarianten als auch der kontravarianten Stufe um eins. Entsprechend wird bei Gleichsetzung zweier ko(kontra)varianter Indizes die ko(kontra)variante Stufe des Tensors um zwei erniedrigt.

Bereits in Abschnitt 2.3 hatten wir die Überschiebung benutzt, die auch als verjüngendes Produkt bezeichnet wird. Eine Überschiebung besteht in der Gleichsetzung von zwei Indizes an zwei verschiedenen Faktoren eines tensoriellen Produktes. Gegeben seien die beiden Tensoren

$$B_{jk}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \frac{\partial x^\gamma}{\partial y^k} A_{\beta\gamma}^\alpha \quad \text{und} \quad B_m^l = \frac{\partial y^l}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^m} A_\mu^\lambda \quad (2.53)$$

und die Überschiebung bestehe im Gleichsetzen von l und k in dem tensoriellen Produkt $B_{jk}^i B_m^l$. Dies führt zu

$$\begin{aligned}
 B_{jk}^i B_m^k &= \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \frac{\partial x^\gamma}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^m} A_{\beta\gamma}^\alpha A_\mu^\lambda \\
 &= \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^m} \delta_\lambda^\gamma A_{\beta\gamma}^\alpha A_\mu^\lambda \\
 &= \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^m} \tilde{A}_{\beta\mu}^\alpha,
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

also zu einem Tensor, dessen Stufen gegenüber dem ursprünglichen tensoriellen Produkt um insgesamt zwei erniedrigt sind. Die Regeln für die Gleichsetzung von ko(kontra)varianten Indizes gelten entsprechend wie bei der Verjüngung.

2.7 Der Metriktensor

Zur Erinnerung:

Sei K ein Körper und V ein endlich dimensionaler Vektorraum über K . Die Abbildung $d : V \times V \rightarrow K$ heißt **Metrik**, wenn für alle $x, y, z \in V$ und $\lambda \in K$ gilt:

- a) $d(x, y) \geq 0$ mit: Aus $d(x, y) = 0$ folgt $x = y$
- b) $d(x, y) = d(y, x)$
- c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Das Paar (V, d) heißt **metrischer Vektorraum**.

In einem euklidischen Raum erlaubt uns die Metrik ein Linienelement ds durch

$$ds^2 = dx^i dx^i \tag{2.55}$$

auszudrücken. Durch die Koordinatentransformation $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$ geht (2.55) unter Beachtung von (2.45) in

$$ds^2 = \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial y^\beta} dy^\alpha dy^\beta \tag{2.56}$$

über. Die Koeffizienten

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial y^\beta} \tag{2.57}$$

werden als Metrikkoeffizienten bezeichnet, denn sie legen die Metrik des Raumes fest, bzw. ergeben sich aus dieser. Der Tensor g_{ij} mit den Koeffizienten (2.57) ist der Metriktensor. Dieser ist kovariant und symmetrisch. Wir können (2.56) einfach als

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \tag{2.58}$$

schreiben. Bei metrischen Räumen lassen sich die Quadrate der Linienelemente immer durch (2.58) beschreiben. Sind die Räume darüber hinaus euklidische, so läßt sich (2.58) in die Form (2.55) überführen.

Im folgenden seien metrische aber nicht notwendig euklidische Räume vorausgesetzt. Die Koeffizienten g_{ij} des Metriktensors nach (2.57) seien einmal stetig differenzierbar ($g_{ij} \in C^1$) und es gelte überall $\det(g_{ij}) \equiv g \neq 0$.

Zu jedem kovarianten, symmetrischen Metriktensor läßt sich der zugeordnete kontravariante, symmetrische Metriktensor g^{ij} finden. Man nennt diese beiden Tensoren auch Fundamental-tensoren. Sie werden üblicherweise wie zwei verschiedene Tensoren behandelt, obwohl es sich bei den g_{ij} und g^{ij} im Grunde genommen ja nur um verschiedene Komponenten des gleichen Tensors handelt. Es gilt die wichtige Beziehung

$$g^{ij}g_{kj} = \delta_k^i. \quad (2.59)$$

Zwischen den ko- und kontravarianten Komponenten des Metriktensors gelten die Beziehungen

$$g^{ij} = \frac{\text{co}(g_{ij})}{g} \quad (2.60)$$

wobei $g = \det(g_{ij})$ die Determinante des Metriktensors und $\text{co}(g_{ij})$ der Kofaktor bzw. die Adjunkte des Elementes g_{ij} (d.h. die mit $(-1)^{(i+j)}$ multiplizierte Unterdeterminante) ist.

Die Koeffizienten des Metriktensors sind im allgemeinen Funktionen der Koordinaten, d.h. sie legen eine lokale Metrik fest.

Zur Herleitung von zwei weiteren wichtigen Rechenregeln, dem Herauf- und Herunterziehen von Indizes, betrachten wir das Tensorprodukt eines Tensors mit einem der Fundamentaltensoren und erhalten den sog. assoziierten Tensor. Eine Verjüngung bei diesem Tensor entspricht einer Überschiebung bei dem Produkt. So ergeben sich z.B.

$$g^{\alpha i}A_{ijk} = A_{.jk}^{\alpha} \quad (2.61)$$

oder

$$g_{j\beta}A_{lm}^{ij\alpha} = A_{lm\beta}^{i,\alpha} \quad (2.62)$$

und durch Vergleichen der Indizes auf beiden Seiten sieht man, daß im ersten Fall (2.61) i formal heraufgezogen und zu α wurde, während im zweiten Fall (2.62) j heruntergezogen und zu β wurde.

Wir wollen uns nun die Bedeutung des Metriktensors am Beispiel des \mathbb{R}^3 verdeutlichen. Sei dazu \vec{g}_i , $i = 1, 2, 3$ (d.h. wir haben die drei Vektoren $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$) eine Basis des \mathbb{R}^3 . Wir wollen nun eine zweite Basis \vec{g}^i , $i = 1, 2, 3$ so konstruieren, daß gilt

$$\langle \vec{g}_i, \vec{g}^j \rangle = \delta_i^j \quad (2.63)$$

wobei wir \vec{g}_i , $i = 1, 2, 3$ die kovariante und \vec{g}^i , $i = 1, 2, 3$ die kontravariante Basis nennen (das ist eine Vereinbarung!). Um den Zusammenhang zwischen kovarianter und kontravarianter Basis zu finden gehen wir von dem allgemeinen Ansatz

$$\vec{g}^i = A^{ij}\vec{g}_j \quad (2.64)$$

bzw.

$$\vec{g}_i = A_{ij}\vec{g}^j \quad (2.65)$$

mit unbekanntem A^{ik} bzw. A_{ik} aus. Multiplizieren wir (2.64) skalar mit \vec{g}^k bzw. (2.65) mit \vec{g}_k , so ergibt sich sofort

$$A^{ij} = \langle \vec{g}^i, \vec{g}^j \rangle \quad (2.66)$$

bzw.

$$A_{ij} = \langle \vec{g}_i, \vec{g}_j \rangle. \quad (2.67)$$

Die Größen

$$g_{ij} = \langle \vec{g}_i, \vec{g}_j \rangle \quad (2.68)$$

sind die Komponenten des kovarianten Metriktensors; die Größen

$$g^{ij} = \langle \vec{g}^i, \vec{g}^j \rangle \quad (2.69)$$

entsprechend die Komponenten des kontravarianten Metriktensors. Es gilt damit

$$\vec{g}^i = g^{ij} \vec{g}_j \quad (2.70)$$

und

$$\vec{g}_i = g_{ij} \vec{g}^j. \quad (2.71)$$

Gehen wir nun von der Darstellung des Vektors \vec{a} in der kovarianten bzw. kontravarianten Basis aus, wobei wir schreiben

$$\vec{a} = a^i \vec{g}_i = a_i \vec{g}^i. \quad (2.72)$$

Multiplizieren wir (2.72) wieder skalar mit z.B. \vec{g}_j , so ist mit (2.63) und (2.68)

$$a^i g_{ij} = a_i \delta_j^i \quad (2.73)$$

d.h.

$$a_j = a^i g_{ij}. \quad (2.74)$$

Analog ergibt sich

$$a^j = a_i g^{ij}. \quad (2.75)$$

Wegen (2.74) und (2.75) nennen wir die a_j , $j = 1, 2, 3$ die kovarianten Komponenten und die a^j , $j = 1, 2, 3$ die kontravarianten Komponenten des Vektors \vec{a} . Gleichung (2.74) zeigt auch, daß durch die Multiplikation mit dem kovarianten Metriktensor ein oberer Index heruntergezogen wird, während wir aus (2.75) ablesen, daß die Multiplikation mit dem kontravarianten Metriktensor einen unteren Index heraufzieht.

Wegen (2.68) gilt für jeden Basisvektor

$$\vec{g}_i = \sqrt[2]{g^{(ii)}} \vec{e}_i \quad (2.76)$$

wobei \vec{e}_i ein Einheitsvektor ist, der die gleiche Wirkungslinie haben soll, wie \vec{g}_i . Ausgehend von (2.76) können wir für einen beliebigen Vektor \vec{a} statt (2.72) schreiben

$$\vec{a} = a_i \sqrt[2]{g^{(ii)}} \vec{e}_i = a^i \sqrt[2]{g_{(ii)}} \vec{e}_i. \quad (2.77)$$

Wir bezeichnen

$$a_i^* = a_i \sqrt[2]{g^{(ii)}} \quad (2.78)$$

als die physikalischen kovarianten Komponenten und

$$a^{*i} = a^i \sqrt{g_{(ii)}} \quad (2.79)$$

als die physikalischen kontravarianten Komponenten des Vektors \vec{a} .

Als Beispiel für die Berechnung des Metriktensors wollen wir Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) betrachten. Für diese Koordinaten gilt bekanntlich die Transformation

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned} \quad (2.80)$$

die wir in unserer Notation auch als

$$\begin{aligned} x^1 &= y^1 \sin y^2 \cos y^3 \\ x^2 &= y^1 \sin y^2 \sin y^3 \\ x^3 &= y^1 \cos y^2 \end{aligned} \quad (2.81)$$

schreiben können. Die kovarianten Komponenten des Metriktensors können wir mit (2.57) berechnen, und ausgeschrieben ergibt sich

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^1}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^1}{\partial y^\beta} + \frac{\partial x^2}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^2}{\partial y^\beta} + \frac{\partial x^3}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^3}{\partial y^\beta} \quad (2.82)$$

Wendet man (2.82) auf (2.81) an, so erkennt man, daß $g_{\alpha\beta} = 0$ für $\alpha \neq \beta$, d.h. der Metriktensor diagonal ist. Durch einfaches Ausrechnen ergeben sich die Diagonalelemente zu

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 \\ g_{22} &= (y^1)^2 = r^2 \\ g_{33} &= (y^1)^2 \sin^2 y^2 = r^2 \sin^2 \vartheta. \end{aligned} \quad (2.83)$$

2.8 Die Christoffel-Symbole und die Christoffelschen Formeln

Als Vorbereitung zur Betrachtung der kovarianten Differentiation im nächsten Abschnitt wollen wir in diesem Abschnitt die Christoffel-Symbole erster und zweiter Art einführen. Das Symbol erster Art wird durch

$$[ij, k] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \quad (2.84)$$

definiert. Für das Christoffel-Symbol erster Art sind auch die Bezeichnungen

$$[ij, k] \equiv \left[\begin{matrix} ij \\ k \end{matrix} \right] \equiv \Gamma_{kij} \equiv \Gamma_{k,ij} \quad (2.85)$$

üblich. Das Symbol zweiter Art wird mittels dem Symbol erster Art als

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} = g^{k\alpha} [ij, \alpha] \quad (2.86)$$

definiert. Auch für dieses Symbol werden verschiedene Bezeichnungen verwendet:

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{matrix} ij \\ k \end{matrix} \right\} \equiv \Gamma_{ij}^k \equiv \Gamma_{ij}^k. \quad (2.87)$$

Wie leicht zu sehen ist, gelten

$$[ij, k] = [ji, k] \quad (2.88)$$

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} k \\ ji \end{matrix} \right\} \quad (2.89)$$

und

$$[ij, k] = g_{\alpha k} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ ij \end{matrix} \right\}. \quad (2.90)$$

Zur Herleitung der Transformationsformeln für die Symbole habe der Metriktensor in einem x -System die Komponenten $g_{ij}(x)$ und in einem y -System die Komponenten $h_{ij}(y)$, wobei die Koordinatentransformation durch $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$ festgelegt sei. Dann ist die Transformation des Metriktensors durch

$$h_{ij}(y) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} g_{\alpha\beta}(x) \quad (2.91)$$

beschrieben. Im y -System wird das Christoffel-Symbol erster Art wegen 2.84 durch

$$[ij, k]_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{ik}}{\partial y^j} + \frac{\partial h_{jk}}{\partial y^i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial y^k} \right) \quad (2.92)$$

gegeben. Einsetzen von (2.91) in (2.92) liefert nach längerer Rechnung unter Benutzung der Symmetrie der g_{ij} die Transformationsformel

$$[ij, k]_y = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \frac{\partial x^\gamma}{\partial y^k} [\alpha\beta, \gamma]_x + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^i \partial y^j} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^k} g_{\alpha\beta}, \quad (2.93)$$

d.h. im allgemeinen ist das Symbol erster Art kein Tensor.

Für das Christoffel-Symbol zweiter Art ergibt sich analog die Transformationsformel

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_y = \frac{\partial y^k}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}_x + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^i \partial y^j} \frac{\partial y^k}{\partial x^\alpha}. \quad (2.94)$$

Auch hier liegt im allgemeinen kein Tensor vor.

Nur für lineare Transformationen $x^\alpha = c_j^\alpha y^j$, $c_j^\alpha = \text{const.}$, verschwindet der zweite Term auf der rechten Seite von (2.93) bzw. von (2.94). In diesem Fall transformiert sich das Christoffel-Symbol erster Art wie ein kovarianter Tensor dritter Stufe, wodurch auch die Schreibweise Γ_{kij} motiviert ist. Das Symbol zweiter Art transformiert sich dann wie ein Tensor, der in zweiter Stufe ko- und in erster Stufe kontravariant ist; auch hier wird die Schreibweise Γ_{ij}^k so motiviert.

Die Transformationsformel (2.94) liefert eine wichtige Beziehung für die zweiten Ableitungen der Koordinaten:

$$\frac{\partial^2 x^m}{\partial y^i \partial y^j} = \frac{\partial x^m}{\partial y^k} \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_y - \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \left\{ \begin{matrix} m \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}_x \quad (2.95)$$

und durch Vertauschen von x und y ergibt sich aus (2.95)

$$\frac{\partial^2 y^m}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial y^m}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_x - \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \left\{ \begin{matrix} m \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}_y. \quad (2.96)$$

(2.95) und (2.96) sind die sogenannten Christoffelschen Formeln.

Wir wollen jetzt noch eine wichtige Formel für die Ableitung der Determinante des Metrikensors betrachten. Dazu gehen wir von der Differentiation von $g = \det(g_{ij})$ aus, was wir auch als

$$g = g_{(i)\alpha} \text{co}(g_{i\alpha}) \quad (2.97)$$

schreiben können. Die Differentiation von (2.97) führt nach einigen Umformungen zu

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} = \sqrt{g} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \alpha i \end{matrix} \right\}. \quad (2.98)$$

2.9 Kovariante Differentiation

In diesem Abschnitt wollen wir die Ableitung eines Tensors nach den Koordinaten betrachten. Wir werden sehen, daß die einfache partielle Differentiation im allgemeinen im Ergebnis keinen Tensor liefert, da für nichtlineare Transformationen ähnlich wie bei den Christoffel-Symbolen ein Störglied in den Transformationsgleichungen auftaucht. Diese Beobachtung führt dann zur Definition der kovarianten Differentiation.

Zur Motivation betrachten wir die partielle Ableitung des kovarianten Vektors

$$B_i(y) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} A_\alpha(x). \quad (2.99)$$

Diese ergibt

$$\frac{\partial B_i}{\partial y^j} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^i \partial y^j} A_\alpha. \quad (2.100)$$

Wie bereits gesagt, zeigt (2.100), daß der Differentialquotient $\partial B_i / \partial y^j$ wegen des zweiten Terms auf der rechten Seite kein Tensor ist. Mit Hilfe der Christoffelschen Formel (2.95) können wir diesen Term aber umformen und gelangen zu

$$\frac{\partial B_i}{\partial y^j} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^k} \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_y A_\alpha - \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k\beta \end{matrix} \right\}_x A_\alpha. \quad (2.101)$$

Wegen (2.99) ist aber

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^k} A_\alpha = B_k \quad (2.102)$$

und damit können wir (2.101) als

$$\frac{\partial B_i}{\partial y^j} - \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_y B_k = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \left\{ \begin{matrix} k \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}_x A_k \right) \quad (2.103)$$

schreiben, und wir sehen, daß sich die Größe

$$B_i|_j \equiv \frac{\partial B_i}{\partial y^j} - \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_y B_k \quad (2.104)$$

wie ein zweistufiger kovarianter Tensor transformiert. Den Tensor $B_i|_j$ nennen wir die kovariante Ableitung des kovarianten Vektors B_i . Analog können wir die kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors

$$B^i(y) = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} A^\alpha(x) \quad (2.105)$$

bestimmen, und wir gelangen zu der Vorschrift

$$B^i|_j \equiv \frac{\partial B^i}{\partial y^j} + \left\{ \begin{matrix} i \\ \gamma j \end{matrix} \right\}_y B^\gamma \quad (2.106)$$

für die Berechnung der kovarianten Ableitung eines kontravarianten Vektors B^i .

Allgemein lautet die kovariante Ableitung eines gemischten Tensors höherer Stufe

$$\begin{aligned} A_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}|_l &= \frac{\partial A_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}}{\partial x^l} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ i_1 l \end{matrix} \right\} A_{\alpha i_2 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ i_2 l \end{matrix} \right\} A_{i_1 \alpha \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} - \dots - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ i_r l \end{matrix} \right\} A_{i_1 \dots i_{r-1} \alpha}^{j_1 \dots j_s} + \\ &\quad \left\{ \begin{matrix} j_1 \\ \alpha l \end{matrix} \right\} A_{i_1 \dots i_r}^{\alpha j_2 \dots j_s} + \left\{ \begin{matrix} j_2 \\ \alpha l \end{matrix} \right\} A_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \alpha \dots j_s} + \dots + \left\{ \begin{matrix} j_s \\ \alpha l \end{matrix} \right\} A_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots \alpha}. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Für die kovariante Ableitung eines Tensors gelten folgende Summen- und Produktregeln:

$$(A_i^j \pm B_i^j)|_l = A_i^j|_l \pm B_i^j|_l \quad (2.108)$$

$$(A_i^j B_r^k)|_l = A_i^j|_l B_r^k + A_i^j B_r^k|_l \quad (2.109)$$

$$(A^{ij} B_{kr})|_l = A^{ij}|_l B_{kr} + A^{ij} B_{kr}|_l. \quad (2.110)$$

Diese Regeln lassen sich leicht verallgemeinern.

Betrachten wir noch die kovariante Ableitung des Einheitstensors und der Fundamentaltensoren: Für den Einheitstensor ist wegen (2.107)

$$\delta_j^i|_l = \frac{\partial \delta_j^i}{\partial x^l} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ j l \end{matrix} \right\} \delta_\alpha^i + \left\{ \begin{matrix} i \\ \alpha l \end{matrix} \right\} \delta_j^\alpha. \quad (2.111)$$

Wegen $\partial \delta_j^i / \partial x^l \equiv 0$ wird aus 2.111

$$\delta_j^i|_l = - \left\{ \begin{matrix} i \\ j l \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i \\ \alpha l \end{matrix} \right\} \delta_j^\alpha \equiv 0 \quad (2.112)$$

d.h. für δ_j^i ist nicht nur die übliche partielle Ableitung sondern auch die kovariante Ableitung gleich Null.

Für den kovarianten Metriktensor g_{ij} ist nach (2.107)

$$g_{ij}|_k = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ i k \end{matrix} \right\} g_{\alpha j} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ j k \end{matrix} \right\} g_{i \alpha}. \quad (2.113)$$

Nun ergibt sich aus (2.84) und (2.90) unter Benutzung der Symmetrie der g_{ij}

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{\alpha j} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ ik \end{matrix} \right\} + g_{\alpha i} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ jk \end{matrix} \right\}. \quad (2.114)$$

Einsetzen von (2.114) in (2.113) liefert unter Beachtung von $g_{i\alpha} \equiv g_{\alpha i}$

$$g_{ij}|_k = 0. \quad (2.115)$$

Um zu zeigen, daß auch die kovariante Ableitung des kontravarianten Metriktensors verschwindet, bilden wir die kovariante Ableitung von $g^{i\alpha} g_{\alpha j} = \delta_j^i$:

$$(g^{i\alpha} g_{\alpha j})|_l = g^{i\alpha}|_l g_{\alpha j} + g^{i\alpha} g_{\alpha j}|_l = \delta_j^i|_l = 0. \quad (2.116)$$

Wegen (2.115) ergibt sich hieraus

$$g^{i\alpha}|_l g_{\alpha j} = 0. \quad (2.117)$$

ia Dies ist ein homogenes algebraisches Gleichungssystem für die Unbekannten $g^{i\alpha}|_l$. Da die Koeffizientendeterminante $\det(g_{\alpha j})$ nach Voraussetzung ungleich Null ist, existiert nur die triviale Lösung

$$g^{i\alpha}|_l \equiv 0. \quad (2.118)$$

Damit sind auch die kovarianten Ableitungen des ko- und kontravarianten Metriktensors gleich Null.

2.10 Ableitung der Basisvektoren

Wir wollen uns in diesem Abschnitt die Bedeutung der kovarianten Ableitung anhand der Ableitung der Basisvektoren genauer anschauen. Die folgenden Betrachtungen werden der Einfachheit halber wieder auf den \mathbb{R}^3 beschränkt, lassen sich aber analog auch für den \mathbb{R}^n formulieren.

Sei $x^i = x^i(y^1, y^2, y^3)$, $i = 1, 2, 3$ eine Transformation mit der wir von dem Koordinatensystem x^i zum System y^i übergehen können. Für dieses System führen wir die Basisvektoren

$$\vec{b}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^i} \quad (2.119)$$

ein, wobei $\vec{r} = (x^1, x^2, x^3)$ der im x^i -System genommene Ortsvektor ist (Abb. 2.1). Formal können wir den Vektor $d\vec{r}$ bilden, mit

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^i} dy^i, \quad (2.120)$$

was mit (2.119) auch als $d\vec{r} = dy^i \vec{b}_i$ geschrieben werden kann. Nun ist $ds^2 = d\vec{r}^2$ (formal richtig müßten wir $\langle d\vec{r}, d\vec{r} \rangle$ statt $d\vec{r}^2$ schreiben, wollen aber im folgenden die etwas einfachere Schreibweise für das Skalarprodukt verwenden) und mit (2.120) ist

$$ds^2 = d\vec{r}^2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^j} dy^i dy^j. \quad (2.121)$$

Abbildung 2.1: Darstellung der Basis \vec{b}_i im \mathbb{R}^3 (aus Leipholz, 1968).

Aus der Definition des Metriktensor können wir für (2.121) auch

$$ds^2 = g_{ij} dy^i dy^j \quad (2.122)$$

schreiben und wegen (2.119) aber auch

$$ds^2 = \vec{b}_i \vec{b}_j dy^i dy^j. \quad (2.123)$$

Der Vergleich von (2.122) und (2.123) liefert die wichtige Beziehung

$$g_{ij} = \vec{b}_i \vec{b}_j. \quad (2.124)$$

Wie bereits in Abschnitt 2.7 verdeutlicht, können wir einen beliebigen Vektor \vec{a} bezüglich der Basis \vec{b}_i durch

$$\vec{a} = a^i \vec{b}_i \quad (2.125)$$

angeben. Differenzieren wir (2.125), so ergibt sich

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial y^j} = \vec{b}_i \frac{\partial a^i}{\partial y^j} + a^i \frac{\partial \vec{b}_i}{\partial y^j}. \quad (2.126)$$

Um (2.126) weiter bearbeiten zu können, müssen wir klären, was $\partial \vec{b}_i / \partial y^j$ bedeutet. Dazu werden wir $g_{ij} = \vec{b}_i \vec{b}_j$ ebenfalls differenzieren, was

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = \frac{\partial \vec{b}_i}{\partial y^k} \vec{b}_j + \frac{\partial \vec{b}_j}{\partial y^k} \vec{b}_i \quad (2.127)$$

ergibt. Durch Permutation der Indizes erhalten wir weitere Beziehungen, die wir alle in die Definition des Christoffel-Symbols erster Art (2.84) einsetzen. Berücksichtigen wir noch, daß wegen (2.119) $\partial \vec{b}_i / \partial y^j = \partial \vec{b}_j / \partial y^i$ ist, so ergibt sich schließlich

$$[ij, k] = \frac{\partial \vec{b}_i}{\partial y^j} \vec{b}_k. \quad (2.128)$$

Sei nun $\vec{b}^i, i = 1, 2, 3$ die zu $\vec{b}_i, i = 1, 2, 3$ gehörige reziproke Basis (siehe Abschnitt 2.7), für die ja $\vec{b}^i \vec{b}_j = \delta_j^i$ gilt. Multiplizieren wir (2.128) nun mit \vec{b}^k , so erhalten wir

$$\frac{\partial \vec{b}_i}{\partial y^j} = [ij, k] \vec{b}^k. \quad (2.129)$$

Multiplizieren wir dies skalar mit \vec{b}^α , so erhalten wir

$$\frac{\partial \vec{b}_i}{\partial y^j} \vec{b}^\alpha = g^{\alpha k} [i, j, k], \quad (2.130)$$

d.h. mit der Definition des Christoffel-Symbols zweiter Art (2.86)

$$\frac{\partial \vec{b}_i}{\partial y^j} \vec{b}^\alpha = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ i, j \end{array} \right\} \quad (2.131)$$

Multiplizieren wir nun dies schließlich noch mit \vec{b}_α , so erhalten wir die Beziehung

$$\frac{\partial \vec{b}_i}{\partial y^j} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ i, j \end{array} \right\} \vec{b}_\alpha \quad (2.132)$$

die wir in (2.126) einsetzen. Dies führt nach Umbenennung stummer Indizes auf

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial y^j} = \left[\frac{\partial a^\alpha}{\partial y^j} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ i, j \end{array} \right\} a^i \right] \vec{b}_\alpha \quad (2.133)$$

und mit der Definition der kovarianten Ableitung können wir (2.133) als

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial y^j} = a^\alpha |_{j} \vec{b}_\alpha \quad (2.134)$$

schreiben. In entsprechender Weise können wir

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial y^j} = a_\alpha |_{j} \vec{b}^\alpha \quad (2.135)$$

herleiten. Aus (2.134) und (2.135) erkennen wir, daß die kovarianten Ableitungen $a^\alpha |_{j}$ bzw. $a_\alpha |_{j}$ die Komponenten des Tensors $\partial \vec{a} / \partial y^j$ bezüglich der Basen \vec{b}_α bzw. \vec{b}^α sind.

2.11 Basisvektoren

In Abschnitt 2.10 wurden Basisvektoren eingeführt. Eine alternative Einführung ergibt sich durch folgende Überlegung: Zunächst betrachten wir eine Koordinatentransformation zwischen beliebigen krummlinigen Koordinaten. Sei also

$$x^i = x^i(y^j), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.136)$$

eine zulässige Koordinatentransformation. Als Beispiel betrachten wir für x^i die Kugelkoordinaten r, ϑ, φ und für y^i die Zylinderkoordinaten R, ϕ, z . Die Transformation wird dann durch

$$\begin{aligned} r &= f_r(R, \phi, z) \\ \vartheta &= f_\vartheta(R, \phi, z) \\ \varphi &= f_\varphi(R, \phi, z) \end{aligned} \quad (2.137)$$

beschrieben, wobei hier die konkrete Form der Funktionale $f_r, f_\vartheta, f_\varphi$ nicht von Bedeutung ist. Sei nun $\vec{h}_i, i = 1, 2, 3$ eine Basis in x^i , d.h. jeder Vektor \vec{r} ist durch $\vec{r} = x^i \vec{h}_i$ darstellbar. Die kovariante Basis in y^i wird dann über die Tangentenvektoren

$$\begin{aligned}\vec{g}_j &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^j} \\ &= \frac{\partial}{\partial y^j} (x^i \vec{h}_i) \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \vec{h}_i + x^i \frac{\partial \vec{h}_i}{\partial y^j}\end{aligned}\quad (2.138)$$

definiert. Problematisch ist hierbei, daß zur Auswertung von (2.138) die explizite Kenntnis der Basis \vec{h}_i und ihrer Ableitungen nach den y -Koordinaten erforderlich ist. Für gewöhnlich werden deshalb die x -Koordinaten als kartesisch vorausgesetzt. Dann ist $\vec{r} = x^i \vec{e}_i$, und wir definieren die kovariante Basis als

$$\vec{g}_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \vec{e}_i. \quad (2.139)$$

Nach Multiplikation mit $\partial y^j / \partial x^i$ erhalten wir hieraus

$$\vec{e}_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \vec{g}_j. \quad (2.140)$$

Die kontravariante Basis wird in analoger Weise als

$$\vec{g}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^m} \vec{e}_m \quad (2.141)$$

definiert. Wie bereits in Abschnitt 1.7 des Skripts angegeben, gelten die Beziehungen

$$\vec{g}_i \cdot \vec{g}^j = \delta_i^j \quad (2.142)$$

$$\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j = g_{ij} \quad (2.143)$$

$$\vec{g}^i \cdot \vec{g}^j = g^{ij}. \quad (2.144)$$

Die ko- und kontravarianten Komponenten eines Vektors \vec{A} erhalten wir aus

$$a_i = \vec{A} \cdot \vec{g}_i \quad (2.145)$$

$$a^i = \vec{A} \cdot \vec{g}^i. \quad (2.146)$$

Als Beispiel betrachten wir die Transformation

$$\begin{aligned}x_1 &= 3y_1 - y_2 \\ x_2 &= 2y_1 + 2y_2 \\ x_3 &= y_3\end{aligned}\quad (2.147)$$

mit der Umkehrung

$$\begin{aligned}y_1 &= \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{8}x_2 \\ y_2 &= -\frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{8}x_2 \\ y_3 &= x_3.\end{aligned}\quad (2.148)$$

Die kovariante Basis ergibt sich nach (2.139) zu

$$\begin{aligned}\vec{g}_1 &= \frac{\partial x^m}{\partial y^1} \vec{e}_m \\ &= \frac{\partial x^1}{\partial y^1} \vec{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^1} \vec{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial y^1} \vec{e}_3 \\ &= 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2\end{aligned}\tag{2.149}$$

$$\vec{g}_2 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2\tag{2.150}$$

$$\vec{g}_3 = \vec{e}_3.\tag{2.151}$$

$$\tag{2.152}$$

Für die kontravariante Basis erhalten wir analog aus (2.141)

$$\begin{aligned}\vec{g}^1 &= \frac{\partial y^1}{\partial x^1} \vec{e}_1 + \frac{\partial y^1}{\partial x^2} \vec{e}_2 + \frac{\partial y^1}{\partial x^3} \vec{e}_3 \\ &= \frac{1}{4} \vec{e}_1 + \frac{1}{8} \vec{e}_2\end{aligned}\tag{2.153}$$

$$\vec{g}^2 = -\frac{1}{4} \vec{e}_1 + \frac{3}{8} \vec{e}_2\tag{2.154}$$

$$\vec{g}^3 = \vec{e}_3.\tag{2.155}$$

$$\tag{2.156}$$

Der kovariante Metriktensor ergibt sich zu

$$g_{ij} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j = \begin{pmatrix} 13 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\tag{2.157}$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir die vorgegebene, kovariante Basis

$$\begin{aligned}\vec{g}_1 &= 3\vec{e}_1 \\ \vec{g}_2 &= 6\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 \\ \vec{g}_3 &= \vec{e}_3\end{aligned}\tag{2.158}$$

und den Vektor

$$\vec{U} = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2.\tag{2.159}$$

Der kovariante Metriktensor errechnet sich zu

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 9 & 18 & 0 \\ 18 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\tag{2.160}$$

während der kontravariante Metriktensor durch

$$g^{ij} = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{576} \begin{pmatrix} 100 & -18 & 0 \\ -18 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 576 \end{pmatrix}\tag{2.161}$$

gegeben ist. Damit läßt sich die kontravariante Basis mittels

$$\vec{g}^i = g^{ij} \vec{g}_j\tag{2.162}$$

zu

$$\begin{aligned}\vec{g}^1 &= \frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{4}\vec{e}_2 \\ \vec{g}^2 &= \frac{1}{8}\vec{e}_2 \\ \vec{g}^3 &= \vec{e}_3\end{aligned}\tag{2.163}$$

berechnen. Für den Vektor \vec{U} erhalten wir die kovarianten Komponenten

$$\begin{aligned}u_1 &= 12 \\ u_2 &= 48 \\ u_3 &= 0\end{aligned}\tag{2.164}$$

und die kontravarianten Komponenten

$$\begin{aligned}u^1 &= \frac{7}{12} \\ u^2 &= \frac{3}{8} \\ u^3 &= 0.\end{aligned}\tag{2.165}$$

Eine Darstellung der Basen sowie von \vec{U} ist in Abbildung 2.2 zu sehen.

2.12 Ableitung der Basisvektoren und Christoffel-Symbole

Im folgenden wollen wir eine zu Abschnitt 2.8 alternative Einführung der Christoffel-Symbole geben, die direkt aus den Ableitungen der Tangentenvektoren bzw. Basisvektoren motiviert ist. Dazu betrachten wir die partielle Ableitung der kovarianten Tangentenvektoren:

$$\vec{g}_{i,j} = \frac{\partial \vec{g}_i}{\partial y^j} = \frac{\partial}{\partial y^j} \left(\frac{\partial x^m}{\partial y^i} \vec{e}_m \right) = \frac{\partial^2 x^m}{\partial y^j \partial y^i} \frac{\partial y^n}{\partial x^m} \vec{g}_n = \Gamma_{ij}^n \vec{g}_n,\tag{2.166}$$

wobei Γ_{ij}^n das uns bekannte Christoffel-Symbol zweiter Art ist. Wegen

$$\frac{\partial}{\partial y^i} (\vec{g}^j \cdot \vec{g}_k) = \vec{g}_k \cdot \vec{g}_{,i}^j + \vec{g}^j \cdot \vec{g}_{k,i} = 0\tag{2.167}$$

bzw.

$$\vec{g}_k \cdot \vec{g}_{,i}^j = -\vec{g}^j \cdot \vec{g}_{k,i} = -\vec{g}^j \cdot \vec{g}_n \Gamma_{ki}^n = -\Gamma_{ki}^j\tag{2.168}$$

ergeben sich die Ableitungen der kontravarianten Tangentenvektoren zu

$$\frac{\partial \vec{g}^j}{\partial y^i} = \vec{g}_{,i}^j = -\Gamma_{ik}^j \vec{g}^k,\tag{2.169}$$

was wir alternative als

$$\frac{\partial \vec{g}^j}{\partial y^i} = \frac{\partial^2 x^m}{\partial y^i \partial y^j} \frac{\partial x^m}{\partial y^k} \vec{g}^k = \Gamma_{ijk} \vec{g}^k = \Gamma_{ij}^k \vec{g}_k\tag{2.170}$$

schreiben, wobei Γ_{ijk} das uns bekannte Christoffel-Symbol erster Art ist.

Abbildung 2.2: Beziehung zwischen ko- und kontravarianten Komponenten eines Vektors. Aus Chung (1988). Beachte, daß in der Abbildung die karthesischen Einheitsvektoren mit i_j statt mit \vec{e}_j bezeichnet werden.

2.13 Kovariante Ableitung

Wir wollen auch noch eine zu Abschnitt 2.9 alternative Einführung der kovarianten Ableitung kennenlernen. Hierzu transformieren wir den Nabla-Operator

$$\nabla = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (2.171)$$

in krummlinigen Koordinaten und erhalten

$$\nabla = \vec{e}^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \vec{e}^i \frac{\partial}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} = \vec{g}^j \frac{\partial}{\partial y^j}. \quad (2.172)$$

Für die Divergenz eines Vektors ergibt sich somit unter Benutzung von (2.166)

$$\nabla \cdot \vec{V} = \vec{g}^i \frac{\partial}{\partial y^i} \cdot (V^j \vec{g}_j) = \vec{g}^i \cdot \vec{g}_j V_{,i}^j + \vec{g}^i \cdot \Gamma_{ji}^k \vec{g}_k V^j = V_{,i}^i + \Gamma_{ij}^i V^j = V_{|i}^i, \quad (2.173)$$

wobei der vertikale Strich beim letzten Term die uns aus Kapitel 1 bekannte kovariante Ableitung für kontravariante Vektoren darstellt. Die Gleichung (2.173) erlaubt uns auch eine anschauliche Interpretation der kovarianten Ableitung. Wir sehen nämlich, daß die kovariante Ableitung zusätzlich zur partiellen Ableitung die durch die Christoffel-Symbole beschriebene Änderung der Tangentenvektoren enthält.

Für die Rotation eines Vektors erhalten wir

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{V} &= \vec{g}^i \frac{\partial}{\partial y^i} \times V_j \vec{g}^j = \vec{g}^i \times \vec{g}^j V_{,i}^j + \vec{g}^i \times \vec{g}_{,i}^j V_j \\ &= \vec{g}^i \times \vec{g}^j (V_{,i}^j - \Gamma_{ji}^r V_r) = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk} \vec{g}_k V_{j|i}, \end{aligned} \quad (2.174)$$

wobei

$$V_{j|i} = V_{,i}^j - \Gamma_{ij}^r V_r \quad (2.175)$$

die kovariante Ableitung für kovariante Vektoren ist.

2.14 Physikalische Komponenten eines Vektors

Wir können nun die physikalischen Komponenten eines Vektors in alternativer Weise einführen. Die physikalischen Komponenten sind auf eine normierte Basis bezogen. Deshalb definieren wir den kovarianten Einheitstangentenvektor

$$\hat{g}_i = \frac{\vec{g}_i}{|\vec{g}_i|} = \frac{\vec{g}_i}{\sqrt{\vec{g}_i \cdot \vec{g}_i}} = \frac{\vec{g}_i}{\sqrt{g^{(ii)}}} \quad (2.176)$$

und analog den kontravarianten Einheitstangentenvektor \hat{g}^i . Damit ergibt sich für einen Vektor \vec{V}

$$\vec{V} = V_i \vec{g}^i = \hat{V}_i \hat{g}^i = \hat{V}_i \frac{\vec{g}^i}{\sqrt{g^{(ii)}}}, \quad (2.177)$$

womit wir sehen, daß

$$V_i = \frac{\hat{V}_i}{\sqrt{g^{(ii)}}}, \quad (2.178)$$

bzw.

$$\hat{V}_i = \sqrt{g^{(ii)}} V_i, \quad (2.179)$$

oder analog

$$\hat{V}^i = \sqrt{g_{(ii)}} V^i \quad (2.180)$$

ist. Für orthogonale Koordinate können diese Beziehungen unter Berücksichtigung von

$$g^{(ii)} = \frac{1}{g_{(ii)}}, \quad (2.181)$$

(was nur für orthogonale Koordinaten gilt) in andere Formen gebracht werden.

2.15 Divergenz und Rotation in Kugelkoordinaten

Als letztes Beispiel wollen wir Divergenz und Rotation eines Vektors mit physikalischen Komponenten in Kugelkoordinaten ausdrücken. Es ist $y_1 = r$, $y_2 = \vartheta$ und $y_3 = \varphi$, sowie $x_1 = r \sin \vartheta \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \vartheta \sin \varphi$, $x_3 = r \cos \vartheta$. Der Ortsvektor hat nun die Form

$$\vec{r} = r \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}_1 + r \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_2 + r \cos \vartheta \vec{e}_3. \quad (2.182)$$

Damit errechnen sich die Tangentenvektoren zu

$$\vec{g}_1 = \vec{r}_{,1} = \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_2 - \cos \vartheta \vec{e}_3 \quad (2.183)$$

$$\vec{g}_2 = \vec{r}_{,2} = r \cos \vartheta \cos \varphi \vec{e}_1 + r \cos \vartheta \sin \varphi \vec{e}_2 - r \sin \vartheta \vec{e}_3 \quad (2.184)$$

$$\vec{g}_3 = \vec{r}_{,3} = -r \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_1 + r \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}_2. \quad (2.185)$$

Der Metriktensor ergibt sich daraus sofort zu

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}. \quad (2.186)$$

Die Christoffel-Symbole sind

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= -r & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \vartheta \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \vartheta \cos \vartheta \\ \Gamma_{13}^2 &= \Gamma_{31}^2 = \frac{1}{r} & \Gamma_{32}^3 &= \Gamma_{23}^3 = \cot \vartheta \end{aligned} \quad (2.187)$$

und alle anderen $\Gamma_{jk}^i = 0$. Die physikalischen Komponenten des Vektors \vec{u} wollen wir hier über

$$u_i = \sqrt{g_{(ii)}} \hat{u}_i, \quad u^i = \sqrt{g^{(ii)}} \hat{u}^i \quad (2.188)$$

angeben. Damit ist

$$\begin{aligned}
u_1 &= \hat{u}_1 = u_r \\
u_2 &= r\hat{u}_2 = ru_\vartheta \\
u_3 &= r \sin \vartheta \hat{u}_3 = r \sin \vartheta u_\varphi
\end{aligned} \tag{2.189}$$

und

$$\begin{aligned}
u^1 &= u_r \\
u^2 &= \frac{u_\vartheta}{r} \\
u^3 &= \frac{u_\varphi}{r \sin \vartheta}.
\end{aligned} \tag{2.190}$$

Für die Divergenz erhalten wir

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{u} &= u_{|i}^i \\
&= u_{,i}^i + \Gamma_{ij}^i u^j \\
&= u_{,1}^1 + u_{,2}^2 + u_{,3}^3 + \\
&\quad \Gamma_{11}^1 u^1 + \Gamma_{12}^1 u^2 + \Gamma_{13}^1 u^3 + \Gamma_{21}^2 u^1 + \Gamma_{22}^2 u^2 + \Gamma_{23}^2 u^3 + \Gamma_{31}^3 u^1 + \Gamma_{32}^3 u^2 + \Gamma_{33}^3 u^3 \\
&= u_{,1}^1 + u_{,2}^2 + u_{,3}^3 + \Gamma_{21}^2 u^1 + \Gamma_{31}^3 u^1 + \Gamma_{32}^3 u^2 \\
&= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} u_r + \frac{\cot \vartheta}{r} u_\vartheta.
\end{aligned} \tag{2.191}$$

Ebenso ergibt sich für die Rotation

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{u} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk} (u_{j,i} - \Gamma_{ji}^r u_r) \vec{g}_k \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}} (u_{2,1} - \Gamma_{21}^2 u_2) \vec{g}_3 + \frac{1}{\sqrt{g}} (-u_{1,2} + \Gamma_{12}^2 u_2) \vec{g}_3 + \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{g}} (u_{1,3} - \Gamma_{13}^3 u_3) \vec{g}_2 + \frac{1}{\sqrt{g}} (-u_{3,1} + \Gamma_{31}^3 u_3) \vec{g}_2 + \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{g}} (u_{3,2} - \Gamma_{32}^3 u_3) \vec{g}_1 + \frac{1}{\sqrt{g}} (-u_{2,3} + \Gamma_{23}^3 u_3) \vec{g}_1 \\
&= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \varphi} - \frac{(\cot \vartheta) u_\varphi}{r} \right) \vec{e}_r + \\
&\quad \left(\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) \vec{e}_\vartheta + \\
&\quad \left(\frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{u_\vartheta}{r} \right) \vec{e}_\varphi,
\end{aligned} \tag{2.192}$$

wobei wir

$$\begin{aligned}
\vec{g}_1 &= \hat{g}_1 = \vec{e}_r \\
\vec{g}_2 &= r \hat{g}_2 = r \vec{e}_\vartheta \\
\vec{g}_3 &= r \sin \vartheta \hat{g}_3 = r \sin \vartheta \vec{e}_\varphi
\end{aligned} \tag{2.193}$$

benutzt haben.

2.16 Der verallgemeinerte δ - und ϵ -Tensor

In Abschnitt 2.2 wurden der δ - und der ϵ -Tensor jeweils in ihrer einfachsten Form eingeführt. Wir wollen hier allgemeine Definitionen für diese beiden Tensoren angeben.

Der verallgemeinerte ϵ -Tensor ist festgelegt durch

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} \text{ (oder } \epsilon^{i_1 \dots i_n}) = \begin{cases} 1 & : & \text{falls } i_1, \dots, i_n \text{ eine gerade Permutation} \\ & : & \text{der Zahlen } 1, \dots, n \text{ ist} \\ -1 & : & \text{falls } i_1, \dots, i_n \text{ eine ungerade Permutation} \\ & : & \text{der Zahlen } 1, \dots, n \text{ ist} \\ 0 & : & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.194)$$

Der verallgemeinerte δ -Tensor ist vollständig antisymmetrisch bezüglich der oberen und unteren Indizes, und wird durch

$$\delta_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k} = \begin{cases} 1 & : & \text{wenn alle oberen Indizes verschieden} \\ & : & \text{sind und die unteren Indizes eine gerade} \\ & : & \text{Permutation der oberen Indizes sind} \\ -1 & : & \text{wenn alle oberen Indizes verschieden} \\ & : & \text{sind und die unteren Indizes eine ungerade} \\ & : & \text{Permutation der oberen Indizes sind} \\ 0 & : & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.195)$$

definiert.

Es ist leicht zu sehen, daß gilt

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{ijk} = \delta_{ijk}^{\alpha\beta\gamma} \quad (2.196)$$

sowie

$$\epsilon^{i_1 \dots i_n} = \delta_{1 \dots n}^{i_1 \dots i_n} \quad (2.197)$$

und

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \delta_{i_1 \dots i_n}^{1 \dots n}. \quad (2.198)$$

Kapitel 3

Der Verzerrungszustand

In diesem Kapitel wollen wir ein Maß für die Verzerrung eines Körpers im belasteten Zustand finden. Dazu werden wir zuerst einen praktischen Standpunkt für die Beschreibung von Deformationen suchen, und wir werden die Bewegung, die zu den Deformationen führt, als Koordinatentransformationen erkennen. Es werden sich zwei verschiedene Betrachtungsweisen ergeben, die auch zu unterschiedlichen Definitionen der zeitlichen Ableitungen einer Größe führen. Der Begriff des Verschiebungsvektors führt uns dann zu einem Deformationsgradient, der aber auch Starrkörperbewegungen enthält und damit nicht das gesuchte Maß darstellt. Mit Hilfe der in Abschnitt 2.7 zum Metriktensor durchgeführten Betrachtungen wird es uns aber gelingen, den Verzerrungstensor als das gesuchte Maß zu definieren.

3.1 Zugangsweisen zu Theorie deformierbarer Medien

Zur Beschreibung deformierbare Medien haben sich im wesentlichen zwei verschiedene Betrachtungsweisen ergeben: Zum einen gibt es die schon seit längerer Zeit insbesondere bei praktischen Problemen überwiegend angewendete makroskopische Betrachtungsweise, die das deformierbare Medium als Kontinuum auffaßt und eine weitgehend phänomenologische Beschreibung der Deformationsprozesse zuläßt; zum anderen setzt sich in neuerer Zeit zunehmend die mikrophysikalische Betrachtungsweise durch, die ausgehend von der atomaren Struktur der Materie zu einem tieferen Verständnis der physikalischen Prozesse bei Deformation führt und insbesondere bei der Behandlung rheologischer Probleme grundlegend ist.

Wir werden überwiegend den makroskopischen Standpunkt benutzen, d.h. wir werden annehmen, daß der Raum stetig von Materie ausgefüllt sei. Dieser Materie werden wir gewisse Materialeigenschaften zuordnen, die (bis auf Grenzschichten) stetige Funktionen des Ortes sein sollen. Aus Experimenten abgeleitete Beziehungen zwischen Belastungen und Verformungen (Stoffgesetze), in die die Materialeigenschaften eingehen, können wir dann benutzen, um die Theorie zur (phänomenologischen) Beschreibung der Deformationen eines Mediums unter Belastungen zu entwickeln.

Es ist Aufgabe der mikrophysikalischen Betrachtungsweise, die den experimentell abgeleiteten Beziehungen zugrundeliegenden physikalischen Prozesse zu erklären. Auf diese Prozesse werden wir nur am Rande eingehen.

3.2 Grundlegende Begriffe

Im folgenden wollen wir die grundlegenden Begriffe bezüglich Materie, Raum und der Einbettung der Materie in den Raum in für uns geeigneter Form festlegen. In zahlreichen einführenden Büchern zur Kontinuumsmechanik wird keine exakte Definition dieser Begriffe angegeben, sondern vielmehr auf ein intuitives Verständnis zurückgeriffen. Auch wir können hier keine mathematisch exakte Definition angeben, möchten diese aber anhand der axiomatischen Einführung von Bertram (1989) skizzieren.

Die grundlegende physikalische Größe des (materiellen) Körpers wird bei Bertram als eine dreidimensionale, kompakte, normale (d.h. abgeschlossen, mit stückweise glatter Rand), orientierte (d.h. es existierte eine nirgends verschwindende C^∞ -Differential-3-Form) differenzierbare Mannigfaltigkeit B mit dem Rand dB definiert. Dabei werden die Elemente von B als materielle Punkte oder Körperpunkte bezeichnet, und im Inneren von B wird die Existenz einer ausgezeichneten positiv integrierbaren Differential-3-Form dm vorausgesetzt, die als Massenelement bezeichnet wird. Die Zahl $m_B := \int_B dm$ bezeichnet dann die Masse von B . Teilkörper werden in naheliegender Weise definiert und ermöglichen damit ein Zerschneiden eines materiellen Körpers in Teile.

Es ist anzumerken, daß diese Definition des Körpers ohne jeden Bezug zum Raum erfolgt ist. Darüberhinaus beinhaltet sie die Kontinuums-Hypothese, d.h. im Rahmen der hier betrachteten Theorie ist es uns nicht möglich, endlich oder abzählbar viele Massenpunkte zu betrachten.

Als Raumbegriff legen wir den Raum unserer physikalischen Anschauung, d.h. den dreidimensionalen Euklidischen Raum \mathbb{E}^3 , zugrunde. Dieser Raumbegriff beinhaltet die zwei sonst häufig üblichen Postulate der Homogenität des Raumes (d.h. es gibt keine a priori ausgezeichneten Raumpunkte) und der Isotropie des Raumes (d.h. es gibt keine a priori ausgezeichneten Richtungen). Dabei bezeichnet a priori den Raum vor der Einbettung von Materie in diesen. Mit dieser „klassischen“ Definition ist der Abstand zweier Punkte unabhängig von der Materie im Raum, was ja in der Relativitätstheorie nicht mehr aufrechterhalten werden kann.

Die voneinander unabhängige Festlegung der Raum- und Materiebegriffe verlangt nun die Einbettung der Materie in den Raum. Dazu führen wir das Konzept der Platzierung ein, die eine Beziehung zwischen Raum und Materie herstellt. Mathematisch betrachtet ist eine Platzierung eine Einbettung der differenzierbaren Mannigfaltigkeit Körper in den \mathbb{E}^3 , was wiederum selbst eine differenzierbare Mannigfaltigkeit darstellt. Damit bei einer Platzierung keine Risse, Überlappungen oder ähnliches auftreten, müssen einige Einschränkungen, wie z.B. Injektivität, gefordert werden (siehe Bertram, 1989). Jede Platzierung erzeugt eine Metrik.

Wichtig ist auch die Festlegung von Platzierungsklassen. Hierbei werden alle Platzierungen in Klassen zusammengefaßt, die die gleiche Orientierung haben und die gegenüber Starrkörperbewegungen abgeschlossen sind.

Weiterhin ist zu bemerken, daß jeder Körper über eine „körper-individuelle“ Platzierungsklasse verfügt, die die Deformationsmöglichkeiten dieses Körpers beinhaltet. So werden in vielen Theorien Körpertypen zugrundegelegt, deren Deformationsmöglichkeiten z.B. durch Inkompressibilität oder Undehnbarkeit in bestimmten Richtungen eingeschränkt sind.

Es sei noch einmal erwähnt, daß wir die Masse unabhängig von ihrer Platzierung, d.h. intrinsisch, definiert haben. Dem liegt die Annahme der Konstanz der Masse (Massenerhaltung) zugrunde.

Die Dichte kann dagegen nicht unabhängig von einer Plazierung definiert werden. Dazu kann für eine Plazierung das Volumenelement dV auf \mathbb{E}^3 so orientiert werden, daß durch

$$\rho_\kappa = *dm_e / *dV > 0 \quad (3.1)$$

die Dichte in der Plazierung κ als positives Skalarfeld ρ_κ festgelegt wird. (Der Sternoperator bedeutet dabei die Zuordnung zum \mathbb{R} und dm_e ist die Einbettung des Körpers unter κ ; siehe Bertram, 1989). Mit dieser Definition der Dichte ergibt sich die Masse des Körpers B zu

$$m_B = \int_B \rho dV \quad (3.2)$$

Zur Beschreibung von Verformungen ist der Begriff der Plazierung nicht ausreichend, da sich unter Starrkörperbewegungen keine Verformungen ergeben. Deshalb führt man den Begriff der „Konfiguration“ ein. Dabei handelt es sich — grob gesagt — um Äquivalenzklassen von Plazierungen, wobei zwei Plazierungen genau dann der gleichen Konfiguration angehören, wenn die von den Plazierungen induzierten Metriken identisch sind.

Die Deformationen lassen sich mittels der bisher eingeführten Begriffe in einer „intrinsichen“ Beschreibung darstellen (Bertram, 1989). Da diese Beschreibung recht abstrakt ist, wurde sie erst spät in die Mechanik eingeführt und hat nur im theoretischen Bereich Anwendung gefunden.

Wesentlich weiter verbreitet ist die Beschreibung mittels einer „Bezugsplazierung“. Dabei wird eine spezielle Plazierung κ_0 des Körpers als Bezugsplazierung ausgezeichnet, wobei die Wahl willkürlich ist. Der Körper muß diese Beziehung nicht einmal zu irgendeinem Zeitpunkt tatsächlich einnehmen. Die zu einem Zeitpunkt vom Körper eingenommene Plazierung wird zur Unterscheidung Momentanplazierung genannt. Abb. 3.1 illustriert die Beziehungen zwischen den verschiedenen Beschreibungen.

Abbildung 3.1: Beziehung zwischen intrinsicher Darstellung und der Beschreibung mittels einer Bezugsplazierung. Die Abbildung x wird als Verrückung oder Deplazierung bezeichnet.

Da die Verrückung x sich als $x = \kappa\kappa_0^{-1}$ darstellen läßt, ist x bijektiv, von der Klasse C^1 und orientierungstreu.

Im folgenden werden auch wir ausschließlich die Bezogene Beschreibungsweise verwenden. Für die konkrete Rechnung benötigen wir Koordinaten, und im nächsten Abschnitt wollen wir die zwei gebräuchlichen Koordinaten betrachten.

3.3 Eulersche und Lagrangesche Koordinaten

Zur Herleitung der Koordinatenschreibweise wollen wir den Körper als aus Volumenelementen aufgebaut auffassen, wobei wir die einzelnen Volumenelemente auch als Massenpunkte betrachten. Hat der Körper zum Zeitpunkt $t = t_0$ eine bestimmte Lage im Raum (Bezugsplatzierung), so können wir jedem Volumenelement einen Punkt und damit ein Koordinatentripel zuordnen. Wird der Körper nun belastet, so wird er deformiert und die Volumenelemente werden Verschiebungen erfahren (Momentantplatzierung). Entsprechend der neuen Lage müssen wir den Massenpunkten also neue Koordinaten zuordnen. Aus dem Unterschied zwischen den neuen und den alten Koordinaten ergibt sich dann der uns interessierende Verschiebungsvektor (s. Abschnitt 3.5).

Sei die Konfiguration des Körper zum Zeitpunkt $t = t_0$ (unbelastet) durch die Punktmenge (P_k) beschrieben, wobei jedem Punkt P_k die Koordinaten ξ^k , $i = 1, 2, 3$ eines beliebigen Koordinatensystems zugeordnet seien. Zur Zeit t ist der Körper (möglicherweise) deformiert und dann durch die Punktmenge (P_k^*) beschrieben, wobei jetzt jedem Punkt P_k^* die Koordinaten

$$\xi_i' = \xi_i'(\xi_j^k, t; t_0), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.3)$$

eines (möglicherweise anderen) Koordinatensystems zugeordnet sind. (s. Abb. 3.2).

Abbildung 3.2: Darstellung des unverformten (K) und des verformten (K') Körpers.

Statt aber mit verschiedenen Koordinatensystemen zu arbeiten, wollen wir im folgenden alle Konfigurationen auf ein gemeinsames kartesisches Koordinatensystem mit raumfesten Basisvektoren \vec{e}_i , $i = 1, 2, 3$ beziehen. Dabei sollen die Raumkoordinaten x_i die Konfiguration des Körpers zum Zeitpunkt $t = t_0$ beschreiben. Die Konfiguration zu einem späteren Zeitpunkt sei durch

$$x_i = x_i(\xi_j, t; t_0), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.4)$$

angegeben. Dabei wird der Parameter t_0 in (3.3) und (3.4) explizit angegeben, da ja die ξ_i von diesem Parameter abhängen. (3.4) beschreibt bereits die Bewegung des Kontinuums, bei der infolge der Deformation die einzelnen Teilchen (Volumenelemente) P_k entlang von Bahnlinien verschoben werden. (s. Abb. 3.3). Die Bahnlinien haben t als Kurvenparameter und die x_i als Scharparameter. Für einen festen Zeitpunkt $t > t_0$ kann diese Bewegung als Abbildung der Anfangskonfiguration auf die Konfiguration zum Zeitpunkt $t > t_0$ aufgefaßt werden.

Durch die im letzten Abschnitt beschriebenen Anforderungen an Platzierungen bzw. Konfigurationen ist sichergestellt, daß die x_i aus (3.4) stetige und umkehrbar eindeutige Zuordnungen von Ortsvektoren x_i zu den Materieteilchen ξ_i sind; solche Abbildungen werden auch als Homöomorphismen bezeichnet. Wie bereits erwähnt, ist durch derartige Abbildungen sichergestellt, daß

Abbildung 3.3: Bewegung eines materiellen Teilchens bei der Deformation.

benachbarte Punkte sich stets an benachbarten Orten befinden (ergibt sich aus der Stetigkeit der x_i), daß sich ein Teilchen nicht zur gleichen Zeit an verschiedenen Orten befinden kann und daß an jedem Ort immer nur ein Teilchen ist. Anders ausgedrückt wollen wir nur solche Bewegungen betrachten, bei denen ein endlicher Volumenbereich nicht zu Null oder unendlich werden kann und bei denen sich das Kontinuum nicht selber durchdringt und keine Risse im Kontinuum klaffen können.

Die Abbildung (3.4) ist nur dann umkehrbar, wenn die Jacobische Determinante

$$J = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right) \quad (3.5)$$

überall existiert und ungleich Null ist. Dies entspricht auch der Bedingung, die wir in Kap. 1 für zulässige Transformationen gefordert hatten. Weil aber zwei entsprechende Volumenelemente der Konfigurationen $t > t_0$ und $t = t_0$ über $dV = JdV$ in Beziehung stehen und $J(t_0) = 1$ ist, muß J als stetige Funktion überall positiv sein.

Die Umkehrung von (3.4) lautet

$$\xi_i = \xi_i(x_j, t), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.6)$$

Es gilt offensichtlich

$$x_i(\xi_j, t = t_0) \equiv \xi_i \quad (3.7)$$

und

$$\xi_i(x_j, t = t_0) \equiv x_i. \quad (3.8)$$

Für die Darstellung des Verformungsprozesses kann man verschiedene Standpunkte wählen. In der Praxis haben sich zwei Möglichkeiten bewährt, nämlich entweder die ξ_i oder die x_i als unabhängige Variable zu benutzen. Bei der ersten Betrachtungsweise ist der Beobachter fest mit dem materiellen Punkt verbunden; diese Betrachtungsweise wird als **materielle, substantielle** oder **Lagrangesche Betrachtungsweise** bezeichnet; die ξ_i bezeichnet man entsprechend als **materielle, substantielle** oder **Lagrangesche Koordinaten**. Bei dieser Art der Betrachtung wird beobachtet, was an einem Materieteilchen passiert, bzw. was sich in seiner unmittelbaren Umgebung abspielt.

Bei der zweiten Betrachtungsweise ist der Beobachter fest mit einem Raumpunkt verbunden; man spricht von der **räumlichen** oder **Eulerschen Betrachtungsweise** und nennt die x_i **räumliche, Orts-** oder **Eulersche Koordinaten**. Es werden also die Ereignisse an einem

Raumpunkt bzw. in seiner unmittelbaren Umgebung beobachtet, d.h. ein Beobachter am Punkt x_i sieht zu einem Zeitpunkt $t > t_0$ ein Teilchen mit dem Namen „ ξ_i “ seinen Standort passieren.

Die Lagrangesche Betrachtungsweise wird dann eingesetzt, wenn die Bewegungen klein sind und deshalb die Effekte aufgrund des mitbewegten Bezugssystems klein sind; dies ist insbesondere in der klassischen Elastizitätstheorie der Fall. Bei der Betrachtung von Strömungen hat sich dagegen die Eulersche Betrachtungsweise als vorteilhafter erwiesen.

3.4 Ableitungen nach der Zeit

In der klassischen Elastizitätstheorie werden keine elastodynamischen Effekte berücksichtigt, und die Zeit taucht nicht explizit als Variable auf. Das Differenzieren von Feldgrößen nach der Zeit spielt dagegen in der Kontinuumsmechanik eine wichtige Rolle. Auch bei der Betrachtung seismischer Wellen und Gezeitendeformationen sind dynamische Effekte zu berücksichtigen.

Sei die (nicht notwendigerweise skalare) Größe Φ als eine Funktion der materiellen Koordinaten ξ_i und der Zeit t gegeben:

$$\Phi = \Phi(\xi_i, t; t_0) \quad (3.9)$$

Mit (3.6) kann man in (3.9) die materiellen Koordinaten durch die räumlichen Koordinaten ersetzen:

$$\Phi = \Phi(\xi_i(x_j, t; t_0), t; t_0) = \Phi(x_j, t) \quad (3.10)$$

Man nennt (3.9) eine **materielle Beschreibung** der Größe Φ und (3.10) eine **Feldbeschreibung**. Die Feldbeschreibung muß unabhängig sein von der willkürlich gewählten Referenzzeit t_0 , und deshalb taucht dieser Parameter bei $\Phi(x_j, t)$ nicht mehr auf.

Für die unterschiedlichen Betrachtungsweisen (s. Abb. 3.3) wollen wir nun zwei verschiedene Ableitungen der Größe Φ nach der Zeit definieren, die wir durch unterschiedliche Symbole kennzeichnen wollen: Die **lokale Ableitung** ist durch

$$\frac{\delta\Phi}{\delta t} = \frac{\partial\Phi(x_i, t)}{\partial t} \quad (3.11)$$

festgelegt, während die **materielle** oder **substantielle Ableitung** durch

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial\Phi(\xi_i, t)}{\partial t} \quad (3.12)$$

definiert ist. Für die materielle Ableitung sind auch die Bezeichnungen

$$\frac{D\Phi}{Dt} \equiv \frac{d\Phi}{dt} \equiv \dot{\Phi} \quad (3.13)$$

üblich.

Die Geschwindigkeit v_i eines materiellen Punktes wird durch

$$v_i(\xi_j, t) = \frac{Dx_i}{Dt} = \frac{\partial x_i(\xi_j, t)}{\partial t} \quad (3.14)$$

und die Beschleunigung durch

$$a_i(\xi_j, t) = \frac{\partial^2 x_i(\xi_j, t)}{\partial t^2} \quad (3.15)$$

gegeben.

Drückt man in der Definition der materiellen Ableitung Φ als Funktion der Raumkoordinaten aus, d.h.

$$\Phi(x_i, t) = \Phi(x_i(\xi_j, t), t), \quad (3.16)$$

so folgt

$$\frac{D\Phi(\xi_i, t)}{Dt} = \frac{\partial\Phi(x_j, t)}{\partial x_k} \frac{\partial x_k(\xi_j, t)}{\partial t} + \frac{\partial\Phi(x_i, t)}{\partial t} \quad (3.17)$$

was wir mit (3.11) und (3.14) auch als

$$\frac{D\Phi(\xi_i, t)}{Dt} = \frac{\partial\Phi(x_j, t)}{\partial x_k} v_k + \frac{\delta\Phi(x_i, t)}{\delta t} \quad (3.18)$$

schreiben können. Ist Φ eine skalare Größe, so läßt sich (3.18) in der bekannten symbolischen Form

$$\dot{\Phi}(\vec{x}, t) = \text{grad}\Phi(\vec{x}, t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \frac{\delta\Phi(\vec{x}, t)}{\delta t} \quad (3.19)$$

schreiben, wobei \vec{x} der Ortsvektor und \vec{v} der Geschwindigkeitsvektor ist.

3.5 Der Verschiebungsvektor und der Deformationsgradient

Infolge einer Belastung werden die materiellen Teilchen in ihrer Lage im Raum verschoben, d.h. sie erfahren eine Verschiebung, die durch den Verschiebungsvektor $\vec{u} = (u_i)$ beschrieben werden kann. Der Verschiebungsvektor als Funktion der Zeit ergibt sich aus der Differenz zwischen den Koordinaten eines Teilchen zur Zeit $t = t_0$ und zur Zeit $t > t_0$. In Lagrangeschen Koordinaten gilt

$$u_i = u_i(\xi_j, t) = x_i(\xi_j, t) - \xi_i \quad (3.20)$$

während der Verschiebungsvektor in Eulerschen Koordinaten durch

$$u_i = u_i(x_j, t) = x_i - \xi_i(x_j, t) \quad (3.21)$$

gegeben wird. Die Gesamtheit der Verschiebungsvektoren in einem deformierten Körper kennzeichnet den Verschiebungszustand, der sich aus Translation, Rotation und Verzerrung zusammensetzt. Translation und Rotation sind dabei die Starrkörperbewegungen, während die Verzerrungen die Formänderungen darstellen.

Der Nabla-Operator läßt sich in körper- oder raumbezogenen Koordinaten definieren:

$$(\nabla_i)_L = (\partial_i)_L = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \quad (3.22)$$

und

$$\nabla_i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (3.23)$$

Das dyadische Produkt aus Nabla-Operator und Verschiebungsvektor führt zu der Gradientendyade, die auch als Verschiebungsdyaide bzw. Verschiebungsgradient bezeichnet wird. In Lagrangeschen Koordinaten ist

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} - \delta_{ij} \quad (3.24)$$

und in Eulerschen Koordinaten haben wir

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}. \quad (3.25)$$

Die Größe

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \quad (3.26)$$

ist der Deformationsgradient. Es gilt

$$F_{ij}^{(-1)} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}. \quad (3.27)$$

Damit können wir (3.24) als

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} = F_{ij} - \delta_{ij} \quad (3.28)$$

und (3.25) als

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - F_{ij}^{(-1)} \quad (3.29)$$

schreiben.

Wir wollen uns die Bedeutung des Deformationsgradienten anhand der Änderung des Linienelementvektors veranschaulichen. Für $t > t_0$ gilt

$$ds_i(\xi_j, t) = dx_i(\xi_j, t), \quad (3.30)$$

d.h. wegen (3.7)

$$ds_i(\xi_j, t = t_0) = d\xi_i. \quad (3.31)$$

Nach (2.45) ist

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} d\xi_j = F_{ij} d\xi_j \quad (3.32)$$

bzw.

$$d\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} dx_j = F_{ij}^{(-1)} dx_j. \quad (3.33)$$

Symbolisch läßt sich dies als

$$d\vec{s} = \mathcal{F} d\vec{s}_0 \quad \text{bzw.} \quad d\vec{s}_0 = \mathcal{F}^{(-1)} d\vec{s} \quad (3.34)$$

schreiben. Damit wird klar, daß der Deformationsgradient ein Tensor zweiter Stufe ist, der einen Linienelementvektor $d\vec{s}_0 = (d\xi_i)$, welcher in der Anfangskonfiguration zwei infinitesimal benachbarte materielle Teilchen verbindet, auf den Linienelementvektor $d\vec{s} = (dx_i)$ abbildet, welcher zur Zeit $t > t_0$ dieselben Teilchen in der aktuellen Konfiguration verbindet.

Der Deformationsgradient ist im allgemeinen von den Lagrangeschen Koordinaten abhängig. Nur für affine Abbildungen (d.h. die x_i sind Linearkombinationen der ξ_i : $x_i = a_{i0} + [\delta_{ij} + a_{ij}] \xi_j$) ist der Deformationsgradient konstant.

Im allgemeinen ist der Deformationsgradient auch nicht symmetrisch. Nur dann, wenn keine Starrkörperbewegung im Bewegungsvorgang enthalten ist, wird der Deformationsgradient symmetrisch.

3.6 Der Verzerrungstensor

Die Aufspaltung des Deformationsgradienten in Starrkörperbewegung und Verzerrung liefert uns den Zugang zum Verzerrungstensor. Möglich ist eine solche Aufspaltung durch eine „polare Zerlegung“ des Deformationsgradienten in ein Produkt (s. z.B. Betten, 1985, Abschnitt 1.5; Becker und Bürger, 1989, Abschnitt 2.1; Bertram, 1989, Satz 8.1). Wir wollen aber durch die Betrachtung eines Linienelementes im unbelasteten und belasteten Zustand das Maß für die Verzerrung gewinnen.

Im unbelasteten Zustand ist das Linienelement durch

$$ds_0^2 = d\xi_i d\xi_i \quad (3.35)$$

gegeben und im belasteten Zustand ist

$$ds^2 = dx_i dx_i. \quad (3.36)$$

Für eine Starrkörperbewegung ist für alle $t > t_0$

$$ds^2 \equiv ds_0^2 \quad (3.37)$$

und deshalb liefert die Differenz der Linienelemente ein Maß für die Verzerrung. Es ist

$$ds^2 - ds_0^2 = dx_i dx_i - d\xi_i d\xi_i. \quad (3.38)$$

Wegen (2.56) und (2.58) ist

$$ds^2 = dx_i dx_i = g_{jk} d\xi_j d\xi_k \quad (3.39)$$

wobei wegen (3.26)

$$g_{jk} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = F_{ij} F_{ik} \quad (3.40)$$

ist. Der Metriktenor g_{ij} gibt hier die Metrik bezüglich der Lagrangeschen Koordinaten an.

Schreiben wir noch für

$$ds_0^2 = d\xi_i d\xi_i = \delta_{ik} d\xi_j d\xi_k \quad (3.41)$$

so erhalten wir für (3.38)

$$\begin{aligned} ds^2 - ds_0^2 &= (g_{jk} - \delta_{jk}) d\xi_j d\xi_k \\ &\equiv 2\lambda_{jk} d\xi_j d\xi_k, \end{aligned} \quad (3.42)$$

wobei wir

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \delta_{ij}) \quad (3.43)$$

gesetzt haben. λ_{ij} ist der **Lagrangesche Verzerrungstensor**. Dieser Tensor ist ebenso wie der Metriktenor symmetrisch.

Unter Benutzung der Definition des Verschiebungsvektors (3.20) ist

$$g_{ij} \equiv \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} = \left(\frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} + \delta_{ki} \right) \left(\frac{\partial u_k}{\partial \xi_j} + \delta_{kj} \right) \quad (3.44)$$

was durch einfaches Ausmultiplizieren in

$$g_{ij} = \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} + \delta_{ij} \quad (3.45)$$

übergeht. Einsetzen von (3.45) in (3.43) liefert

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} + \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_j} \right). \quad (3.46)$$

(3.46) drückt den Lagrangeschen Verzerrungstensor durch die Komponenten des Verschiebungsvektors aus. Diese Gleichungen stellen die erste wichtige Form der gesuchten geometrischen Beziehungen dar. Bezüglich der partiellen Ableitungen $\partial u_i / \partial \xi_j$ sind diese Beziehungen nicht linear. Nur bei sehr kleinen Verzerrungen können diese "geometrischen Nichtlinearitäten" vernachlässigt werden.

Mittels des Deformationsgradienten können wir (3.43) auch als

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{2} (F_{ki} F_{kj} - \delta_{ij}) \quad (3.47)$$

schreiben. Der Tensor $C_{ij} = F_{ki} F_{kj} \equiv g_{ij}$ wird auch als **rechter Cauchy-Green-Tensor** bezeichnet, und er beschreibt die Metrik bezüglich der Lagrangeschen Koordinaten.

Analog zu der Herleitung des Lagrangeschen Verzerrungsmaßes können wir auch einen Eulerschen Verzerrungstensor herleiten. Dazu gehen wir von

$$ds_0^2 = d\xi_i d\xi_i = h_{jk} dx_j dx_k \quad (3.48)$$

aus, wobei

$$h_{ij} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = F_{ki}^{(-1)} F_{kj}^{(-1)} = B_{ij}^{(-1)} \quad (3.49)$$

ist und die Metrik bezüglich der Eulerschen Koordinaten angibt. Der Tensor $B_{ij} = F_{ik} F_{jk}$ wird auch als **linker Cauchy-Green-Tensor** bezeichnet. Das Abstandsquadrat in der aktuellen Konfiguration wird durch

$$ds^2 = dx_i dx_i = \delta_{jk} dx_j dx_k \quad (3.50)$$

gegeben. Damit wird

$$ds^2 - ds_0^2 = (\delta_{jk} - h_{jk}) dx_j dx_k = 2\eta_{jk} dx_j dx_k \quad (3.51)$$

wobei wir den **Eulerschen Verzerrungstensor** als

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - h_{ij}) \quad (3.52)$$

definiert haben. Mit (3.49) können wir (3.52) auch als

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - F_{ki}^{(-1)} F_{kj}^{(-1)} \right) \quad (3.53)$$

schreiben. Durch Benutzung der Definition (3.21) des Verschiebungsvektors in Eulerschen Koordinaten können wir (3.52) in

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (3.54)$$

überführen. (3.54) beschreibt in analoger Weise zu (3.46) den Eulerschen Verzerrungstensor durch die Komponenten des Verschiebungsvektors und stellt die zweite wichtige geometrische Beziehung dar. Auch hier haben wir eine in den partiellen Ableitungen $\partial u_i / \partial x_j$ nichtlineare Beziehung zwischen Verschiebungsvektor und Verzerrungstensor.

3.7 Infinitesimale Verzerrungstensoren

Bei kleinen Verzerrungen können in (3.46) und (3.54) die geometrischen Nichtlinearitäten vernachlässigt werden, was auf den **infinitesimalen Lagrangeschen Verzerrungstensor**

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} \right) = \frac{1}{2} (F_{ij} + F_{ji}) - \delta_{ij} \quad (3.55)$$

und den **infinitesimalen Eulerschen Verzerrungstensor**

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \delta_{ij} - \frac{1}{2} (F_{ij}^{(-1)} + F_{ji}^{(-1)}) \quad (3.56)$$

führt. Dabei wird

$$\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad (3.57)$$

auch als **klassischer Verzerrungstensor** bezeichnet.

Bei infinitesimalen Verschiebungen braucht nicht zwischen Lagrangeschen und Eulerschen Koordinaten unterschieden zu werden, so daß dann die linearisierten Verzerrungstensoren (3.55) und (3.56) näherungsweise übereinstimmen. Nach (2.7) stellen sie den symmetrischen Anteil in der additiven Zerlegung der Verschiebungsgradienten (3.24) in

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} = \gamma_{ij} + \alpha_{ij} \quad (3.58)$$

bzw. (3.25) in

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \epsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (3.59)$$

dar, wobei die antisymmetrischen Anteile durch

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} - \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} \right) \quad (3.60)$$

bzw.

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.61)$$

festgelegt sind.

Benutzt man die Zerlegung des Deformationsgradienten (3.58) um den Lagrangeschen bzw. (3.59) um den Eulerschen Verzerrungstensor auszudrücken, so ergibt sich

$$\lambda_{ij} = \gamma_{ij} + (\gamma_{ki} + \alpha_{ki})(\gamma_{kj} + \alpha_{kj})/2 \quad (3.62)$$

bzw.

$$\eta_{ij} = \epsilon_{ij} + (\epsilon_{ki} + \omega_{ki})(\epsilon_{kj} + \omega_{kj})/2. \quad (3.63)$$

(3.62) und (3.63) zeigen, daß die Verzerrungstensoren auch von den antisymmetrischen Anteilen α_{ij} und ω_{ij} abhängen. D.h. auch beim Verschwinden der symmetrischen Anteile können die Verzerrungstensoren verschieden von Null sein. Damit hat das Verschwinden der linearisierten Tensoren (3.55) und (3.56) im allgemeinen keine Starrkörperbewegung zur Folge. Auch werden

umgekehrt die linearisierten Tensoren von einer Starrkörperbewegung beeinflusst, obwohl diese keine Verzerrung bewirkt.

Bei infinitesimalen Verzerrungen beschreibt der symmetrische Anteil eine 'reine' Streckung und der antisymmetrische Anteil eine 'reine' Drehung. Bei endlichen Verformungen ist eine additive Zerlegung in Streckung und Drehung nach (3.58) und (3.59) nicht mehr möglich. Diese Zerlegung muß dann durch eine multiplikative (polare) Zerlegung erfolgen.

Für infinitesimale Verformungen läßt sich auch die Verformung eines Volumenelementes additiv in eine Gestaltänderung (**Distorsion**) und eine Volumenänderung (**Dilatation**) aufspalten. Mittels

$$\epsilon_{ij} = \tilde{\epsilon}_{ij} + \epsilon_{kk}\delta_{ij}/3 \quad (3.64)$$

wird der klassische Verzerrungstensor in eine Deviator $\tilde{\epsilon}_{ij}$, der die Gestaltänderung beschreibt, und einen Kugeltensor $\epsilon_{kk}\delta_{ij}/3$, der die Volumenänderung beschreibt, zerlegt.

3.8 Kompatibilitätsbedingungen für den Verzerrungstensor

Unsere in Abschnitt 3.3 geforderten Bedingungen für eine zulässige Bewegung führen dazu, daß nicht jeder beliebige Verzerrungszustand ein Ergebnis einer solchen zulässigen Bewegung sein kann. Vielmehr müssen die Komponenten des Verzerrungstensors bestimmten Bedingungen genügen. Insbesondere müssen die Verzerrungen eines Volumenelementes mit den Verzerrungen der Nachbarelemente verträglich sein. Wir wollen diese Verträglichkeitsbedingungen für den klassischen Verzerrungstensor betrachten.

Sind die Verschiebungen bekannt, so können aus (3.57) die Komponenten des Verzerrungstensors in eindeutiger Weise bestimmt werden. Ist dagegen der Verzerrungstensor bekannt, so können die Komponenten des Verschiebungsvektors nicht eindeutig bestimmt werden, da dieser ja auch die Starrkörperbewegung enthält.

Um aus den 6 partiellen Differentialgleichungen (3.57) die 3 Koordinaten des Verschiebungsvektors bestimmen zu können, müssen diese Gleichungen bestimmten Integrabilitätsbedingungen genügen. Diese können dadurch ermittelt werden, daß in (3.57) die Verschiebungen eliminiert werden. Durch Differenzieren und Vertauschen von Indizes ergeben sich

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij,kl} &= (u_{i,jkl} + u_{j,ikl})/2 \\ \epsilon_{kl,ij} &= (u_{k,l ij} + u_{l,ki j})/2 \\ \epsilon_{jl,ik} &= (u_{j,lik} + u_{l,jik})/2 \\ \epsilon_{ik,jl} &= (u_{i,kjl} + u_{k,ijl})/2, \end{aligned} \quad (3.65)$$

was unmittelbar zu der gesuchten Bedingung für die Komponenten des Verzerrungstensors

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{jl,ik} = 0 \quad (3.66)$$

führt. Diese Bedingungen lassen sich auch aus der Vorstellung herleiten, daß der verzerrte Raum ebenso wie der ursprüngliche Raum euklidisch sein soll und deshalb der Riemansche Krümmungstensor verschwinden muß.

Das System (3.66) besteht insgesamt aus 81 partiellen Differentialgleichungen. Durch Ausschreiben sieht man aber, daß einige Gleichungen identisch sind, während andere Gleichungen aufgrund der Symmetrien $\epsilon_{ij,kl} = \epsilon_{ji,kl} = \epsilon_{ij,lk}$ ineinander übergehen. Tatsächlich bleiben nur 6 wesentliche Gleichungen übrig:

$$\begin{aligned} \epsilon_{12,12} + \epsilon_{21,21} - \epsilon_{11,22} - \epsilon_{22,11} &= 0 && \text{(zwei weitere durch zyklisches} \\ &&& \text{Vertauschen der Indizes),} \\ \epsilon_{11,23} + \epsilon_{23,11} - \epsilon_{13,12} - \epsilon_{12,13} &= 0 && \text{(zwei weitere durch zyklisches} \\ &&& \text{Vertauschen der Indizes),} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Die Bedingungen (3.67) sind notwendig und hinreichend für die Integrierbarkeit von (3.57), wegen der in den Verschiebungen enthaltenen Starrkörperbewegung nicht aber für die Eindeutigkeit.

Faßt man die in (3.67) auf der linken Seite stehenden Größen als Komponenten des Inkompatibilitätstensors R_{ij} auf, d.h.

$$R_{ij} = \epsilon_{ipr}\epsilon_{jqs}\epsilon_{pq,rs} \quad (3.68)$$

dessen Divergenz

$$R_{ij,j} = \epsilon_{ipr}\epsilon_{jqs}\epsilon_{pq,r sj} \quad (3.69)$$

ist, was sich im wesentlichen aus der Symmetrie der $\epsilon_{pq,r sj} = \epsilon_{pq,r js}$ ergibt, so sieht man, daß (3.67) kein System von sechs unabhängigen Gleichungen darstellt.

3.9 Andere Definitionen des Verzerrungstensors

Es soll hier noch darauf hingewiesen werden, daß es auch andere Möglichkeiten gibt, den Verzerrungszustand zu beschreiben und damit einen Verzerrungstensor zu definieren. Bei der Auswahl einer Definition stehen praktische Aspekte der Anwendung im Vordergrund. So wird z.B. bei der Beschreibung der endlichen Verformung eines Stabes der Anfangslänge l_0 und der augenblicklichen Länge l die effektive Dehnung

$$\epsilon_{\text{eff}} = \int_{l_0}^l \frac{dl'}{l'} = \ln(l/l_0) \equiv \ln(1 + \epsilon) \quad (3.70)$$

verwendet. Diese Definition läßt sich verallgemeinern mit

$$g_{ij} = \ln(v_{ij}) \quad (3.71)$$

und

$$h_{ij} = \ln(w_{ij}), \quad (3.72)$$

wobei g_{ij} und h_{ij} die Metrikensoren sind (entsprechend (3.45) und (3.49) und (v_{ij}) den Verzerrungstensor bezüglich der Lagrangeschen bzw. (w_{ij}) bezüglich der Eulerschen Koordinaten darstellt. Durch eine Diskussion der Eigenwerte der durch (3.71) und (3.72) definierten Tensoren läßt sich zeigen, daß diese Definitionen sinnvoll sind. Diese auch **Henckyschen Verzerrungstensoren** genannten logarithmischen Tensoren bieten den Vorteil, daß sie sich auch bei endlichen Verformungen additiv in Volumenänderung und Gestaltänderung aufspalten lassen, was ja nach Abschnitt 3.7 für die dort diskutierten Tensoren nicht der Fall war.

Kapitel 4

Der Spannungszustand

Dieses Kapitel wird uns auf die bereits in den Vorbemerkungen erwähnten Bewegungsgleichungen $\sigma_{ij,j} + K_i = \rho \partial_{tt} u_i$ führen. Dazu werden wir zuerst die Kräfte, die an der Oberfläche und im Inneren eines Kontinuums wirken können, diskutieren. Wir werden sehen, daß sich diese Kräfte in einem Spannungstensor zusammenfassen lassen. Eine Bilanz der Kräfte (im statischen Fall) bzw. der Impulse (im dynamischen Fall) führt uns dann zu den Gleichgewichtsbedingungen.

4.1 Die Kräfte am Kontinuum

Die auf ein deformierbares Kontinuum wirkenden Kräfte lassen sich in zwei Klassen einteilen: **Volumenkräfte**, die auch als Fernkräfte bezeichnet werden, sind räumlich verteilt, während die **Flächenkräfte**, die auch Nahkräfte genannt werden, flächenhaft verteilte Spannungen darstellen.

Sowohl Volumenkräfte als auch Flächenkräfte können als äußere oder innere Kräfte auftreten. Eine äußere Volumenkraft ist zum Beispiel die Schwerkraft, während die zwischen den Volumenelementen wirkende Gravitationskraft eine innere Volumenkraft darstellt. Äußere Spannungen rühren von Zug- oder Drucklasten an der Oberfläche des Kontinuums her, während innere Spannungen frei werden, wenn man ein im Inneren des Kontinuums liegendes Volumenelement herausschneidet und die von benachbarten Volumenelementen übertragenen Spannungen betrachtet.

Wir werden Volumenkräfte durch $(K_i)dV$ bezeichnen, d.h. die (K_i) haben die Bedeutung einer Kraft pro Volumeneinheit mit

$$K_i = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta K_i^*}{\Delta V} \quad (4.1)$$

wobei ΔK_i^* die Komponenten der gesamten, am Volumen ΔV angreifenden Kraft sind.

Für Flächenkräfte werden wir die Bezeichnung $(p_{ni})dS$ benutzen, wobei der Index n andeuten soll, daß das Flächenelement dS die nach außen zeigende Normale (n_i) hat. Dabei hat (p_{ni}) die Einheit einer Kraft pro Fläche. Durch

$$p_{ni} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{p_{ni}^*}{\Delta S} \quad (4.2)$$

sind die Komponenten des Spannungsvektors mit dem Betrag $\|(p_{ni})\|$ definiert, und $\|(p_{ni})\|$ ist die Spannung, die der auf der äußeren Seite von ΔS liegende Teil des Kontinuums auf den

inneren Teil ausübt. Dabei sind die p_{ni}^* die Komponenten der gesamten, an der Fläche ΔS angreifenden Kraft.

In (4.2) setzen wir voraus, daß alle Momente, die von den (p_{ni}^*) auf das Flächenelement übertragen werden, bei dem Grenzübergang $\Delta S \rightarrow 0$ verschwinden. Damit betrachten wir keine Momentenspannungen. Von E. und F. Cosserat wurde zu Beginn des Jahrhunderts eine Theorie entwickelt, die solche Momentenspannungen und zusätzlich sog. Volumenmomente in bestimmter Weise berücksichtigt. Solche Kontinua werden als Cosserat-Kontinua bezeichnet. In einer Weiterentwicklung der Theorie zeigte sich, daß die Cosserat-Kontinua wiederum ein Spezialfall der sog. „polaren Kontinua“ sind. Wir können diese hier natürlich nicht behandeln. Es sei nur noch angemerkt, daß Volumenmomente z.B. in einem magnetisch polarisierten Material, das sich in einem äußeren Magnetfeld befindet, auftreten.

Wir werden weiter unten sehen, daß die Voraussetzung verschwindender Momentenspannungen eine wichtige Konsequenz für den Spannungstensor hat.

Während bei der Betrachtung des Verzerrungszustandes die Lagrangesche Betrachtungsweise sinnvoll war, werden wir zunächst den Spannungszustand am verformten Element und mit den Koordinaten x_i des verformten Körpers formulieren, d.h. wir werden hier die Eulersche Betrachtungsweise benutzen. Wir werden aber bald sehen, daß wir durch diese Betrachtungsweise bei der nachfolgenden Definition des Spannungstensors nur zu einer von vielen möglichen Definitionen gelangen.

Im folgenden sollen die Volumenkräfte als einmal stetig differenzierbare Funktionen und die Flächenkräfte als stückweise stetige Funktionen der Koordinaten x_i vorausgesetzt werden.

4.2 Der Spannungstensor

Gegeben sei ein beliebiges Flächenelement dF mit der Normalen (n_i) . Dann läßt sich die durch (4.2) definierte Spannung (p_{ni}) in zwei Komponenten σ_n und τ_n , parallel und senkrecht zu n_i zerlegen, mit

$$\sigma_n = p_{ni}n_i \quad (4.3)$$

und

$$\tau_n = \sqrt{p_{ni}p_{ni} - \sigma_n^2}. \quad (4.4)$$

Um aber den Spannungszustand in einem Punkt P vollständig zu beschreiben, reicht die Angabe eines Spannungsvektors nicht aus, denn durch den Punkt P können wir ja unendlich viele Flächenelemente legen. Dagegen ist der Spannungszustand vollständig beschrieben, wenn wir drei Spannungsvektoren bezüglich dreier Flächenelemente angeben, deren Normalenvektoren nicht linear abhängig sind. Zweckmäßigerweise wählt man die durch P gehenden und zu den x_i gehörigen Koordinatenebenen als Bezugsflächen. Wir erhalten damit drei Spannungsvektoren $(p_j)_i$, $i, j = 1, 2, 3$. Es ist naheliegend, diese drei Spannungsvektoren in einer Matrix zusammenzufassen:

$$(p_j)_i = (\sigma_{ij}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.5)$$

wobei der erste Index die Bezugsebene und der zweite Index die Richtung angibt, in welche der zu einem σ_{ij} gehörige Spannungskomponentenvektor wirkt. Dabei verwenden wir σ als Bezeichnung für die Komponenten der Matrix und p für die Komponenten des Spannungsvektors. Bei dieser Matrix handelt es sich um den **Cauchyschen Spannungstensor**, der auch als **wahrer**

Spannungstensor (weil er die wahren Spannungen, d.h. Kraft/Momentanquerschnitt, angibt) bezeichnet wird.

Mittels der Komponenten dieses Spannungstensors läßt sich tatsächlich der Spannungsvektor (p_{ni}) bezüglich einer beliebigen, durch P gelegten Fläche dF mit der Normalen (n_i) berechnen. Dies ergibt sich aus der Betrachtung eines infinitesimalen Tetraeders um den Punkt P . Es zeigt sich, daß

$$p_{ni} = \sigma_{ji}n_j \quad (4.6)$$

ist, d.h. (4.6) stellt eine lineare Abbildung des Vektors (n_i) auf den Vektor (p_{ni}) dar, mit σ_{ij} als linearem Operator bzw. als Tensor zweiter Stufe. In der Literatur wird (4.6) auch zur Definition des Cauchyschen Spannungstensors verwendet.

Analog zur Aufspaltung des Verzerrungstensors (3.64) läßt sich der Cauchysche Spannungstensor mittels

$$\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} + \sigma_{kk}\delta_{ij}/3 \quad (4.7)$$

in den Deviator $\tilde{\sigma}_{ij}$ und den Kugeltensor $\sigma_{kk}\delta_{ij}/3$ aufspalten, wobei ersterer die sogen. deviatorischen Spannungen enthält.

Herrscht in einem Medium ein hydrostatischer Spannungszustand, so wird ein Volumenelement durch den von allen Seiten gleichen hydrostatische Druck p beansprucht. Der Spannungstensor ist in diesem Fall ein Kugeltensor mit

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad (4.8)$$

so daß der Deviator verschwindet.

4.3 Das Reynoldsche Transporttheorem

Für die Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen, bzw. der Feldgleichungen für ein deformierbares Medium ist es sinnvoll, das Reynoldsche Transporttheorem zur Verfügung zu haben. In diesem Abschnitt soll also dieses für Bilanzgleichungen sehr hilfreiche Theorem diskutiert werden.

Sei dazu $\Phi(x_i, t)$ ein (nicht notendigerweise skalares) Feld. Für einen Körper mit dem Volumen $B(t)$ definieren wir

$$\Psi(t) = \int_{B(t)} \Phi(x_i, t) dV. \quad (4.9)$$

Wir wollen nun die substantielle zeitliche Ableitung von Ψ , d.h. $D\Psi/Dt$ betrachten. Aus der Definition sehen wir, daß Ψ in zweifacher Weise von der Zeit t abhängt, und zwar durch die Zeitabhängigkeit von Φ selbst und durch die des vom Körper eingenommenen Volumens B . Transformieren wir Ψ in Lagrangsche Koordinaten, d.h.

$$\Psi(t) = \int_{B_0} \Phi(x_i(\xi_j, t), t) J(\xi, t) dV_0, \quad (4.10)$$

dann ergibt sich die substantielle Ableitung von Ψ durch die Differentiation des Integranden alleine:

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \int_{B_0} \left(\frac{D\Phi}{Dt} J + \Phi \frac{DJ}{Dt} \right) dV_0. \quad (4.11)$$

Nutzt man aus, daß

$$\frac{DJ}{Dt} = J\nabla_i v_i \quad (4.12)$$

ist, so erhält man die endgültige Form des **Reynoldschen Transporttheorems** für Volumenintegrale:

$$\begin{aligned} \frac{D\Psi}{Dt} &= \int_{B_0} \left(\frac{D\Phi}{Dt} + \Phi\nabla_i v_i \right) J dV_0 \\ &= \int_{B(t)} \left(\frac{D\Phi}{Dt} + \Phi\nabla_i v_i \right) dV. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Im folgenden werden wir einige alternative Schreibweisen für dieses Theorem benötigen. Benutzen wir für $\frac{D\Phi}{Dt}$ die Darstellung (3.19), so läßt sich (4.13) als

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \int_{B(t)} \left(\frac{\delta\Phi}{\delta t} + (\nabla_i\Phi)v_i + \Phi\nabla_i v_i \right) dV \quad (4.14)$$

schreiben, was uns mit

$$(\nabla_i\Phi)v_i + \Phi\nabla_i v_i = \nabla_i(\Phi v_i) \quad (4.15)$$

auf

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \int_{B(t)} \left(\frac{\delta\Phi}{\delta t} + \nabla_i(\Phi v_i) \right) dV \quad (4.16)$$

führt. Mit dem Gaußschen Satz läßt sich das Volumenintegral über $\nabla_i(\Phi v_i)$ in ein Oberflächenintegral überführen, so daß wir

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \int_{B(t)} \frac{\delta\Phi}{\delta t} dV + \int_{\partial B(t)} \Phi v_i n_i dS \quad (4.17)$$

schreiben können, wobei (n_i) der nach außen gerichtete Normalen-Einheitsvektor von ∂B und dS das Flächenelement von ∂B ist.

In einigen Fällen tritt ein Produkt der Dichte mit einem Skalar- oder Vektorfeld auf. Für diesen Fall läßt sich das Reynoldsche Transporttheorem in einer weiteren, einfachen Form angeben. Dazu wollen wir zuerst die Massenbilanz betrachten. In dem Volumen B existiert ein Dichtefeld $\rho(x_i, t)$, so daß sich die Masse des Körpers nach (3.2) berechnen läßt:

$$m(B(t)) = \int_{B(t)} \rho(x_i, t) dV. \quad (4.18)$$

Erhaltung der Masse besagt nun, daß

$$\frac{Dm}{Dt} = \int_{B(t)} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla_i v_i \right) dV = 0 \quad (4.19)$$

ist. Da B auch ein beliebiger Teilkörper sein kann, führt uns die Stetigkeit des Integranden damit auf die **Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla_i v_i = 0. \quad (4.20)$$

Damit haben wir die erste wichtige Gleichung für die Dynamik von Flüssigkeiten vor uns.

Die für den Übergang von der integralen zur differentiellen Form herangezogene Argumentation wird auch im folgenden in analogen Situationen ohne besondere Erwähnung verwendet werden.

Mit der Darstellung (4.17) können wir (4.20) auch als

$$\frac{\delta\rho}{\delta t} + \nabla_i(\rho v_i) = 0 \quad (4.21)$$

schreiben.

Ersetzen wir nun in (4.9) den Integranden Φ durch das Produkt des Dichtefeldes ρ mit dem Feld $\phi = \Phi/\rho$, so ergibt sich für (4.13)

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \int_{B(t)} \left(\frac{D\rho}{Dt} \phi + \rho \frac{D\phi}{Dt} + \rho \phi \nabla_i v_i \right) dV. \quad (4.22)$$

Wegen (4.20) heben sich der erste und letzte Summand im Integranden weg, so daß nur

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \int_{B(t)} \rho \frac{D\phi}{Dt} dV \quad (4.23)$$

übrig bleibt.

4.4 Feldgleichungen des deformierbaren Mediums

Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen für ein deformierbares Medium werden wir die an dem Körper im Volumen B angreifenden Kräfte betrachten. Die Summe aller an diesem Volumen in x_i -Richtung angreifenden Kräfte wird durch

$$K_i = \int_B k_i dV + \int_{\partial B} p_{ni} dS \quad (4.24)$$

angegeben, wobei die Schreibweise wie in Abschnitt 4.1 und im letzten Abschnitt gewählt wurde. Mit (4.6) läßt sich dies in

$$K_i = \int_B k_i dV + \int_{\partial B} \sigma_{ji} n_j dS \quad (4.25)$$

umformen. Mit dem Gaußschen Satz können wir das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral überführen:

$$\int_{\partial B} \sigma_{ji} n_j dS = \int_B \nabla_j \sigma_{ji} dV, \quad (4.26)$$

und damit können wir (4.25) weiter zu

$$K_i = \int_B (k_i + \nabla_j \sigma_{ji}) dV \quad (4.27)$$

umformen.

Im statischen Fall muß $K_i = 0$ gelten, so daß wir in diesem Fall die differentiellen Gleichgewichtsbedingungen

$$\nabla_j \sigma_{ji} + k_i = 0 \quad (4.28)$$

angeben können. Zu diesen Bedingungen kommen noch die Randbedingungen hinzu. Wirkt auf ein Oberflächenelement mit der Normalen (n_i) die Oberflächenkraft (p_i) , so ergeben sich die Randbedingungen unmittelbar aus (4.6) zu

$$p_i = \sigma_{ji}n_j. \quad (4.29)$$

Im dynamischen Fall betrachten wir die Impulsbilanz, wobei der Impulsvektor (I_i) eines Körpers B durch

$$I_i = \int_B \rho v_i dV \quad (4.30)$$

definiert ist. Unter der Voraussetzung, daß es sich bei unserem Bezugssystem um ein Inertialsystem handelt, können wir die Impulsbilanz als

$$\frac{DI}{Dt} = K_i \quad (4.31)$$

schreiben. Man beachte, daß in (4.31) die materielle Ableitung verwendet wird! Mit Hilfe von (4.23) können wir damit die differentielle Form der Impulsbilanz angeben:

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \nabla_j \sigma_{ji} + k_i. \quad (4.32)$$

Mit der Beziehung (3.19) können wir die materielle Ableitung in Eulersche Koordinaten überführen und erhalten die Feldgleichungen vollständig in Eulerschen Koordinaten:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k + \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + k_i. \quad (4.33)$$

In dieser Form werden wir die Feldgleichungen für die Beschreibung von Flüssigkeiten heranziehen.

Ist der Gradient der Geschwindigkeit klein, was wir bei kleinen Deformationen eines festen Körpers voraussetzen können, so geht (4.33) in

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + k_i \quad (4.34)$$

über, wobei der Verschiebungsvektor (u_i) in (3.21) definiert ist.

Wir wollen nun noch die Drehimpulsbilanz bzw. das Gleichgewicht aller Momente, die an einem Volumen angreifen, betrachten. Das Moment der am Volumen angreifenden Kräfte ergibt sich zu

$$M_i = \int_B \epsilon_{ijk} x_j k_k dV + \int_{\partial B} \epsilon_{ijk} x_j p_{nk} dS, \quad (4.35)$$

wobei im statischen Fall $M_i = 0$ gilt.

Auch in (4.35) müssen wir das zweite Integral in ein Volumenintegral überführen. Dazu ersetzen wir p_{nk} mittels (4.6) und erhalten

$$\int_{\partial B} \epsilon_{ijk} x_j p_{nk} dS = \int_{\partial B} \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk} n_l dS \quad (4.36)$$

was wir durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes in

$$\int_{\partial B} \epsilon_{ijk} x_j p_{nk} dS = \int_B \nabla_l (\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk}) dV = \int_B \epsilon_{ijk} (\delta_{jl} \sigma_{lk} + x_j \nabla_l \sigma_{lk}) dV \quad (4.37)$$

überführen können. Nun ist $\delta_{jl}\sigma_{lk} = \sigma_{jk}$, so daß sich endlich

$$\int_{\partial B} \epsilon_{ijk} x_j p_{nk} dS = \int_B \epsilon_{ijk} (\sigma_{jk} + x_j \nabla_l \sigma_{lk}) dV \quad (4.38)$$

ergibt. Setzt man (4.38) in (4.35) ein, so folgt

$$M_i = \int_B \epsilon_{ijk} (\sigma_{jk} + x_j \nabla_l \sigma_{lk} + x_j k_k) dV. \quad (4.39)$$

Im statischen Fall, wo wegen (4.28) $\nabla_l \sigma_{lk} + k_k = 0$ ist, erhalten wir

$$\int_B \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0, \quad (4.40)$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0. \quad (4.41)$$

Wegen der besonderen Eigenschaften des ϵ -Tensors ergibt sich aus (4.41) die Symmetrie

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (4.42)$$

des Spannungstensors. Zu dieser Aussage gelangen wir nur, weil wir vorausgesetzt haben, daß keine Momentenspannungen vorkommen. In der Theorie der polaren Kontinua (auch des Cosserat-Kontinuums) hat man dagegen auch mit einem unsymmetrischen Spannungstensor zu rechnen.

Im dynamischen Fall entspricht die zeitliche Änderung des Drehimpulses (L_i) des Körpers B , der bezogen auf den Koordinatenursprung durch

$$L_i = \int_B \epsilon_{ijk} x_j (\rho v_k) dV \quad (4.43)$$

gegeben wird, dem Moment der an B angreifenden Kräfte, d.h.

$$\frac{DL_i}{Dt} = M_i. \quad (4.44)$$

Unter Berücksichtigung von (4.23) und (4.32) bleibt von der Drehimpulsbilanz wiederum nur (4.40) übrig, so daß wir wieder die Symmetrie des Spannungstensors erhalten.

4.5 Piola-Kirchhoff Spannungstensoren

Bei der Betrachtung elastodynamischer Probleme oder bei endlichen Verformungen ist oft die Lagrangesche Betrachtungsweise vorteilhafter; dies gilt insbesondere dann, wenn die Randbedingungen auf die Anfangskonfiguration bezogen sind. In der Elastodynamik gibt man der Lagrangeschen Betrachtungsweise auch deshalb den Vorzug, weil der Anfangszustand ein natürlicher Bezugszustand ist, in den ein elastisches Medium nach jeder Belastung zurückkehrt.

In diesem Abschnitt werden wir eine Darstellung des Spannungstensors bezüglich Lagrangescher Koordinaten herleiten, die wir zur Angabe der Gleichgewichtsbedingungen und nachfolgend der Bewegungsgleichungen in Lagrangeschen Koordinaten benötigen.

Dazu erinnern wir uns, daß der Cauchysche Spannungstensor die wahren Spannungen angibt, d.h. wir beziehen die momentanen Spannungen auf ein momentanes Flächenelement dS , und für den Spannungsvektor bezüglich dS erhalten wir

$$dp_i = \sigma_{ji} dS_j \quad (4.45)$$

wobei wir die Abkürzung $dS_j = n_j dS$ verwendet haben. Ebenso können wir die momentanen Spannungen auf das ursprüngliche Flächenelement dS_j^0 beziehen. Wir sprechen dann von **Nennspannungen** oder auch **Lagrangeschen Spannungen**. Durch

$$dp_i = T_{ji} dS_j^0 \quad (4.46)$$

definieren wir einen entsprechenden Spannungstensor.

Aufgrund der Transformation eines Flächenelementes und aus dem Prinzip der Massenerhaltung ergibt sich zwischen dem momentanen und dem ursprünglichen Flächenelement die Beziehung

$$dS_j^0 = \frac{\rho}{\rho_0} F_{pj} dS_p. \quad (4.47)$$

Dabei ist ρ die momentane, ρ_0 die ursprüngliche Dichte und $F_{pj} = \partial x_p / \partial \xi_j$ der Deformationsgradient nach (3.26). Setzen wir (4.47) in (4.46) ein, so erhalten wir

$$dp_i = T_{ji} \frac{\rho}{\rho_0} F_{pj} dS_p, \quad (4.48)$$

und durch Vergleich mit (4.6) sehen wir, daß

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} F_{ik} T_{kj} \quad (4.49)$$

ist. Die Umkehrung ergibt sich durch Überschiebung von (4.49) mit $F_{pi}^{(-1)}$ und anschließender Umbenennung von Indizes zu

$$T_{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} F_{ik}^{(-1)} \sigma_{kj}. \quad (4.50)$$

Der durch (4.50) definierte Spannungstensor wird auch als „**erster**“ **Piola-Kirchhoff-Tensor** bezeichnet. Der Zusammenhang mit dem Cauchyschen Spannungstensor zeigt (unter Benutzung von $\sigma_{ij} = (\sigma_{ij} + \sigma_{ji})/2$), daß dieser erste Piola-Kirchhoff-Tensor T_{ij} im allgemeinen nicht symmetrisch ist. Um zu einer Definition eines symmetrischen Spannungstensors bezüglich der Lagrangeschen Koordinaten zu kommen, führen wir einen „fiktiven“ Spannungsvektor ein, von dem wir verlangen, daß er sich in gewisser Weise wie ein Linienelement transformiert. Genauer gesagt verlangen wir, daß er sich aus dem Spannungsvektor (4.46) auf gleiche Weise ergibt, wie das ursprüngliche Linienelement (ds_{0i}) aus dem momentanten Linienelement (ds_i). Wegen (3.31) und (3.33) ist

$$ds_{0i} = F_{ij}^{(-1)} ds_j. \quad (4.51)$$

Damit wollen wir für unseren fiktiven Spannungsvektor $d\tilde{p}_i$ verlangen, daß

$$d\tilde{p}_i = F_{ij}^{(-1)} dp_j \quad (4.52)$$

gilt. Weiter definieren wir durch

$$d\tilde{p}_i = \tilde{T}_{ji} dS_j^0 \quad (4.53)$$

einen Tensor (den „zweiten“ **Piola-Kirchhoff-Tensor**), für den wir durch Vergleich von (4.53) und (4.46) sofort

$$d\tilde{T}_{ji} = F_{ik}^{(-1)} T_{jk} \quad (4.54)$$

und die Umkehrung

$$T_{ji} = F_{ik} \tilde{T}_{jk} \quad (4.55)$$

angeben können. Unter Benutzung von (4.49) und (4.50) ergeben sich daraus

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} F_{ip} F_{jq} \tilde{T}_{pq} \quad (4.56)$$

und

$$\tilde{T}_{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} F_{ip}^{(-1)} F_{jq}^{(-1)} \sigma_{pq}. \quad (4.57)$$

Die Gleichungen (4.57) zusammen mit den Symmetrieeigenschaften von σ_{ij} und $F_{ij}^{(-1)}$ liefern die Symmetrie des zweiten Piola-Kirchhoff-Tensors. Die Gleichungen (4.56) und (4.57) können als Transformationsgesetze aufgefaßt werden, die den Cauchyschen Spannungstensor (d.h., die Eulersche Beschreibungsweise des Spannungszustandes) in den zweiten Piola-Kirchhoff-Tensor (d.h., in die Lagrangesche Beschreibungsweise) überführen.

Setzt man noch

$$F_{ijpq} = (F_{ip} F_{jq} + F_{iq} F_{jp})/2, \quad (4.58)$$

so kann man die Beziehungen (4.56) und (4.57) als

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} F_{ijpq} \tilde{T}_{pq} \quad (4.59)$$

und

$$\tilde{T}_{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} F_{ijpq}^{(-1)} \sigma_{pq} \quad (4.60)$$

schreiben.

Wir wollen jetzt noch der Vollständigkeit wegen die Feldgleichungen (4.32) in Lagrangeschen Koordinaten angeben. In dieser Form werden die Gleichungen in der Elastizitätstheorie und bei der Behandlung von Festkörpern benötigt. Zur Transformation schreiben wir die Gleichungen als

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} + k_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt}, \quad (4.61)$$

wobei wir σ_{ij} als $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\xi_k(x_l))$ auffassen und $k_i = k_i(x_j)$ nehmen. Durch eine längere Rechnung gelangt man dafür zu den Feldgleichungen in Lagrangeschen Koordinaten

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\tilde{T}_{kj} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right) + k_i^0 = \rho \frac{Dv_i}{Dt} \quad (4.62)$$

wobei (k_i^0) die auf das unverformte Volumenelement dV_ξ bezogene Volumenkraft ist, d.h

$$\frac{dV_x}{dV_\xi} k_i = k_i^0. \quad (4.63)$$

Für die Randbedingungen (4.29) ergeben sich in Lagrangeschen Koordinaten die Gleichungen

$$\tilde{T}_{ij} n_j = p_i^0, \quad (4.64)$$

wobei der Zusammenhang zwischen p_i und p_i^0 durch den Gleichungen (4.63) entsprechende Beziehungen gegeben wird.

Wir haben bisher Bilanzgleichungen für Masse, Kräfte, Momente, Impulse und Drehimpulse betrachtet und daraus bestimmte Bedingungen abgeleitet. Insbesondere werden für uns die Kontinuitätsgleichung aus der Erhaltung der Masse und die Feldgleichungen aus der Impulsbilanz von Bedeutung sein. In der Kontinuumsmechanik werden weitere Bilanzgleichungen (u.a. Energie, Entropie) betrachtet, und auch wir werden in Kap. 6 die Energiebilanz betrachten.

Die Erfahrung zeigt aber, daß sich verschiedene Stoffe unter denselben äußeren Kraftfeldern unterschiedlich verformen. Mithin reichen Bilanzgleichungen nicht zur vollständigen Beschreibung des Bewegungszustandes eines Kontinuums aus. Die uns noch fehlenden Gleichungen sind die Materialgleichungen, die einen Zusammenhang zwischen Spannung und Verzerrung liefern, und diese Gleichungen sind der Gegenstand des folgenden Kapitels.

Kapitel 5

Stoffgesetze

Die bisher betrachtete Theorie zur Beschreibung von Verformungs- und Spannungszustand war nahezu unabhängig von den Materialeigenschaften. Tatsächlich haben wir nur an einer Stelle Annahmen über Materialeigenschaften machen müssen, und zwar bei der Betrachtung der Drehimpulsbilanz, wo wir keine Momentenspannungen zugelassen haben, d.h. wir haben uns an dieser Stelle auf nicht-polare Medien beschränkt. Für solche Medien ist die bisher angegebene Beschreibung universell gültig.

Uns fehlt nun allerdings noch der Zusammenhang zwischen dem Verformungszustand und dem Spannungszustand. Zu Beginn wollen wir einige Betrachtungen allgemeiner Art zu den Eigenschaften eines solchen Materialgesetzes anstellen, bevor wir in den folgenden Abschnitten diese Beziehung für uns interessierende spezielle Medien genauer untersuchen werden.

5.1 Allgemeine Materialgleichung

Damit Materialgleichungen eine sinnvoll Ergänzung der mechanischen Bilanzgleichungen darstellen, müssen sie den Spannungszustand $\sigma_{ij}(\xi, t)$ auf den Bewegungszustand des Körpers zurückführen. Unter Berücksichtigung der Kausalität können wir als allgemeinste Form solcher Gleichungen angeben:

$$\sigma_{ij}(\xi_k, t) = f_{ij}(x_k(\eta_l, t - s); \xi_k)|_{s \in [0, \infty] \eta_k \in B}. \quad (5.1)$$

Hierbei ist f_{ij} zunächst ein beliebiges Funktional. $s \in [0, \infty]$ bedeutet, daß s alle Werte des angegebenen Intervalls annimmt, und $\eta \in B$ hat die gleiche Bedeutung. Damit läßt f_{ij} zunächst weitreichende Wechselwirkungen zu, und f_{ij} ist vom Bewegungszustand in der Vergangenheit abhängig. Die für f_{ij} auch angegebene explizite Abhängigkeit von materiellen Punkt ξ_k steht für eine mögliche Inhomogenität des betrachteten Körpers.

Dagegen hängt f_{ij} nicht von der Zeit t ab, d.h. die Materialgesetze sind nicht zeitabhängig. Immer dann, wenn eine Zeitabhängigkeit der Materialgesetze vorzuliegen scheint, Materialien also einem Alterungsprozeß unterliegen, können wir davon ausgehen, daß unsere rein mechanische Beschreibung nicht vollständig ist. Als Beispiel sei hier der Abbindevorgang von Beton angeführt, bei dem eine anfangs zähe Flüssigkeit in einen spröden Festkörper übergeht. Eine vollständige Beschreibung dieses komplexen Vorgangs kann nur im Rahmen einer thermodynamischen Theorie erfolgen.

Wir wollen für unser Material voraussetzen, daß ein beliebig bewegter Beobachter an diesem Material die gleichen Eigenschaften feststellt, d.h. derselben Deformationsgeschichte entspricht derselbe Spannungstensor, unabhängig davon, von welchem Bezugssystem die Spannungen und Deformationen betrachtet werden. Wir verlangen also für unser Materialgesetz eine „Beobachterinvarianz“, bzw. vom Spannungstensor „materielle Objektivität“.

Aus diesem Prinzip lassen sich wichtige Folgerungen ziehen. Dazu betrachten wir zwei gegeneinander bewegte Beobachter, wobei die relative Bewegung durch

$$\tilde{y}_i(t) = Q_{ij}(t)(x_j(t) - c_j(t)) \quad (5.2)$$

beschrieben wird. Q_{ij} beschreibt die Rotation und c_j die Translation des Koordinatenursprungs des zweiten Bezugssystems relative zum ersten System. Ein im x -System ruhender Beobachter stellt an dem Punkt ξ_i die Bewegung $x_j(\xi_i, t)$ fest, während ein im y -System ruhender Beobachter die Bewegung

$$\tilde{y}_i(\xi_k, t) = Q_{ij}(t)(x_j(\xi_k, t) - c_j(t)) \quad (5.3)$$

sieht.

Da wir vom Cauchyschen Spannungstensor Beobachterinvarianz verlangen, müssen die von jedem Beobachter bezüglich seines Bezugssystems ermittelten Spannungstensoren durch

$$\tilde{\sigma}_{ij} = Q_{ip}Q_{jq}\sigma_{pq} \quad (5.4)$$

miteinander verknüpft sein. Damit muß (5.1) für alle Translationen $c(t)$ und alle Rotationen $Q(t)$

$$f_{ij}(Q_{kl}(t-s)[x_l(\eta_m, t-s) - c_l(t-s)]; \xi_k)|_{s \in [0, \infty] \eta_m \in B} = Q_{ip}Q_{jq}f_{pq}(x_k(\eta_m, t-s); \xi_k)|_{s \in [0, \infty] \eta_m \in B} \quad (5.5)$$

sein. Betrachten wir einen beliebigen Punkt ξ_k und die Starrkörperbewegung, die gerade die Bewegung an diesem Punkt ausgleicht, also $c_j(t) = x_j(\xi_k, t)$ und $Q_{ij}(t) = \delta_{ij}$, so erhalten wir

$$f_{ij}(x_k(\eta_m, t-s); \xi_l)|_{s \in [0, \infty] \eta_m \in B} = f_{pq}(x_k(\eta_m, t-s) - x_k(\xi_n, t-s); \xi_l)|_{s \in [0, \infty] \eta_m \in B}, \quad (5.6)$$

d.h. das Materialgesetz hängt im Punkt ξ_i nur von der Relativebewegung bzw. der Differenzgeschichte ab. Da der Punkt ξ_i beliebig war, gilt dies für alle Punkte des Körpers B .

5.2 Elastische Materialien

Wir wollen zunächst die Materialgleichungen für elastische Medien betrachten. Für diese wollen wir keine weitreichenden Wechselwirkungen zulassen. Deshalb setzen wir voraus, daß die Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors σ_{ij} in einem materiellen Punkt ξ_i zur Zeit t nur von dem Deformationsgradienten F_{ij} in diesem Punkt abhängen, d.h.

$$\sigma_{ij}(\xi_m, t) = f_{ij}(F_{kl}(\xi_m, t)) \quad (5.7)$$

ist, wobei wir der Einfachheit halber Homogenität vorausgesetzt haben, um die explizite Abhängigkeit unseres Funktionals f_{ij} von ξ nicht mitschleppen zu müssen. Bei inhomogenen Materialien müßten in (5.7) die Koordinaten ξ_i ebenfalls als unabhängige Variable in f_{ij} auftauchen. (5.7) impliziert auch die Zeitunabhängigkeit der Materialeigenschaften, da ja die Zeit in f_{ij} nicht als unabhängige Variable angegeben wird.

Wir wollen nun die im vorangegangenen Abschnitt zur Beobachterinvarianz durchgeführten Betrachtungen auf den durch (5.7) beschriebenen Fall spezialisieren. Der Deformationsgradient für den mitbewegten Beobachter ist durch

$$\tilde{F}_{ij} = \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \xi_j} = Q_{im} F_{mj} \quad (5.8)$$

mit dem Deformationsgradienten F_{ij} verknüpft, den ein ruhender Beobachter sieht. Damit unterscheidet sich der Deformationsgradient für den ruhenden und den mitbewegten Beobachter. Man sagt auch, der Deformationsgradient sei keine **objektive physikalische Größe**.

Da jeder Beobachter „seinen“ Deformationsgradienten zur Ermittlung des Spannungszustands in (5.7) einsetzt, ergibt sich wegen (5.4)

$$Q_{ik} Q_{jl} f_{kl}(F_{pq}) \equiv f_{ij}(Q_{pr} F_{rq}) \quad (5.9)$$

Diese Bedingung beschreibt die **Form-Invarianz** der Materialgleichung (5.7).

Weitere Forderungen bezüglich f_{ij} ergeben sich bei isotropem Stoffverhalten. In diesem Fall muß der Spannungszustand aufgrund einer Deformation F_{ij} der gleiche sein, wie der Spannungszustand, der sich nach einer vorherigen Rotation, d.h. aufgrund von $F_{il} Q_{lj}$, ergibt. Dies führt uns auf

$$f_{ij}(F_{kq} Q_{ql}) = f_{ij}(F_{kl}). \quad (5.10)$$

Betrachtet man nun eine Bewegung mit $Q_{ij} = \delta_{ij}$ und wählt einen spannungsfreien Anfangszustand, so daß gilt

$$f_{ij}(\delta_{pq}) = 0, \quad (5.11)$$

so folgt aus (5.10), daß $f_{ij}(\delta_{pq}) = 0$ ist für alle Zeiten $t > t_0$. Damit ergibt sich, daß Starrkörperbewegungen keine Spannungen erzeugen.

Aus (5.10) kann man nun ableiten, daß f_{ij} nur eine Funktion des Tensors V_{ij} ist, wobei V_{ij} der sogenannte Links-Streck-Tensor ist, der sich aus der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten ergibt, und $V_{ik} V_{kj} = B_{ij}$ ist (mit B_{ij} der linke Cauchy-Green-Tensor, siehe Abschnitt 3.6), was sich symbolisch als $\mathcal{V} = \mathcal{B}^{1/2}$ schreiben läßt. Damit ist in einem isotropen Körper

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(V_{ij}). \quad (5.12)$$

Ersetzt man F_{ij} durch $Q_{ip} F_{pj}$ so geht V_{ij} in $Q_{ip} Q_{jq} V_{pq}$ über, und wegen (5.9) ergibt sich

$$f_{ij}(Q_{kp} Q_{lq} V_{pq}) = f_{ij}(V_{kl}). \quad (5.13)$$

Eine Funktion, die diese Relation erfüllt, wird als **isotrope Tensorfunktion** bezeichnet. Die allgemeinste Darstellung einer solchen Funktion hat die Form

$$f_{ij}(V_{kl}) = \phi_0 \delta_{ij} + \phi_1 V_{ij} + \phi_2 V_{ip} V_{pj}, \quad (5.14)$$

wobei ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 beliebige Funktionen der drei Grundinvarianten von V_{ij} (siehe Abschnitt 2.4) sind. (5.14) stellt die allgemeinste Form der Materialgleichung isotroper, elastischer Materialien dar.

Setzt man noch die Gültigkeit der geometrischen Linearisierung voraus (siehe Abschnitt 3.7), so gilt

$$V_{ij} = \delta_{ij} + \gamma_{ij} \quad (5.15)$$

und damit

$$V_{ik}V_{kj} = \delta_{ij} + 2\gamma_{ij}. \quad (5.16)$$

Einsetzen von (5.15) und (5.16) in (5.14) führt uns schließlich auf

$$\sigma_{ij} = \Phi_0\delta_{ij} + \Phi_1\gamma_{ij} \quad (5.17)$$

wobei $\Phi_0 = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2$, $\Phi_1 = \phi_1 + 2\phi_2$ ist. Fordert man zusätzlich einen linearen und homogenen Zusammenhang zwischen σ_{ij} und γ_{ij} (**physikalische Linearisierung**), so ergibt sich endlich

$$\sigma_{ij} = 2\mu\gamma_{ij} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{ij} \quad (5.18)$$

, welches das Hookesche Gesetz für isotrope Körper ist. Hierbei sind λ und μ zwei Materialkonstanten, die bei einem inhomogenen Medium von den Koordinaten abhängen. Die Bedeutung dieser Konstanten werden wir im nächsten Abschnitt diskutieren, wenn wir das Hookesche Gesetz allgemeiner betrachten.

Aufgrund der Gültigkeit der geometrischen Linearisierung brauchen wir in (5.18) nicht zwischen γ_{ij} und ϵ_{ij} zu unterscheiden und können deshalb (5.18) auch als

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (5.19)$$

schreiben.

5.3 Das Hookesche Gesetz

Das von Hooke 1678 angegebene Gesetz $\sigma = E\epsilon$ verknüpft Spannung und Dehnung durch eine lineare Beziehung mit der Proportionalitätskonstanten E . In Verallgemeinerung dieses Gesetzes wird in der klassischen Elastizitätstheorie für (5.7) das (physikalisch und geometrisch) lineare Gesetz

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (5.20)$$

angeben, das den klassischen Verzerrungstensor (der eine Funktion des Deformationsgradienten ist) mit dem Cauchyschen Spannungstensor in Beziehung setzt. Dabei ist E_{ijkl} der Elastizitätstensor, dessen Komponenten für ein homogenes, anisotropes Medium Konstanten sind. Aufgrund der Symmetrien von σ_{ij} und ϵ_{ij} ergeben sich die Beziehungen

$$E_{ijkl} = E_{jikl} \quad (5.21)$$

und

$$E_{ijkl} = E_{ijlk}, \quad (5.22)$$

womit sich die ursprünglich 81 Komponenten auf 36 voneinander unabhängige Größen reduzieren.

Für ein isotropes Material muß man verlangen, daß die Stoffeigenschaften gegen Drehungen des Koordinatensystems invariant sind. Der Tensor E_{ijkl} transformiert sich nach

$$E_{pqrs} = a_{ip}a_{jq}a_{kr}a_{ls}E'_{ijkl}, \quad a_{mn} = \cos(x'_m, x_n) \quad (5.23)$$

und wegen der Invarianz gegen Drehung gilt

$$E'_{ijkl} = E_{ijkl}. \quad (5.24)$$

Damit folgt

$$E_{pqrs} = a_{ip}a_{jq}a_{kr}a_{ls}E_{ijkl} \quad (5.25)$$

was nur dann erfüllt sein kann, wenn E_{ijkl} von der Form

$$E_{pqrs} = \lambda\delta_{pq}\delta_{rs} + \mu\delta_{pr}\delta_{qs} + \kappa\delta_{ps}\delta_{qr} \quad (5.26)$$

ist. Die Symmetrien (5.21) und (5.22) führen auf die notwendige Bedingung

$$(\kappa - \mu)(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) = 0. \quad (5.27)$$

Diese Beziehung kann allgemein nur für $\kappa = \mu$ erfüllt sein. Um dies zu sehen, setze man z.B. $i = k$, $j = l$. Dann ist $\delta_{ik}\delta_{jl} = 9$, $\delta_{il}\delta_{jk} = 3$ und es muß $(\kappa - \mu) = 0$ sein, damit (5.27) erfüllt ist.

Damit geht (5.26) in

$$E_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (5.28)$$

über, und Einsetzen von (5.28) in das Hookesche Gesetz (5.20) liefert

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}\epsilon_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\epsilon_{kl} \quad (5.29)$$

was wir unter Benutzung der Eigenschaften des Einheitstensors auch als

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} + 2\mu\epsilon_{ij} \quad (5.30)$$

schreiben können. Die Konstanten λ und μ werden als **Lamesche Konstanten** bezeichnet.

Wir wollen noch die Umkehrung von (5.30) berechnen: Wir erhalten zuerst

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu}\delta_{ij}\epsilon_{kk}. \quad (5.31)$$

Gleichsetzen von i und j , (Verjüngung!) mit $\delta_{ii} = 3$ und anschließende Umbenennung stummer Indizes liefert

$$\epsilon_{kk} = \frac{\sigma_{kk}}{3\lambda + 2\mu}, \quad (5.32)$$

womit sich (5.31) in

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\delta_{ij}\sigma_{kk} \quad (5.33)$$

überführen läßt.

In der Elastizitätslehre sind neben den Lameschen Konstanten noch mehrere andere Konstanten üblich (Tab. 5.1). Für ein isotropes Medium sind aber immer nur zwei Konstanten voneinander unabhängig. Für die physikalische Interpretierbarkeit wäre es sinnvoller, die Materialgleichungen mittels Schermodul μ und Kompressionsmodul K zu formulieren. Mit den Beziehungen aus Tab. 5.1 ergibt sich damit das Hookesche Gesetz zu

$$\sigma_{ij} = (K - \frac{2}{3}\mu)\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}. \quad (5.34)$$

Mit der Poissonschen Querkontraktionszahl ν und dem Youngschen Modul E läßt sich (5.33) als

$$\epsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk} \quad (5.35)$$

Tabelle 5.1: Übersicht über die gebräuchlichen Konstanten des isotropen Mediums. Es sind λ und μ : Lamesche Konstanten; E : Youngscher bzw. Elastizitätsmodul; ν : Poissonsche Querkontraktionszahl; K : Kompressionsmodul; G : Schubmodul; $r = \sqrt{E^2 + 9\lambda^2 + 2E\lambda}$.

	λ	$\mu = G$	E	ν	K
λ, μ	λ	μ	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$
λ, E	λ	$\frac{E-3\lambda+r}{4}$	E	$\frac{2\lambda}{E+\lambda+r}$	$\frac{E+2\lambda+2}{6}$
λ, ν	λ	$\frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}$	$\frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{3K-\lambda}$	ν	$\frac{\lambda(1+\nu)}{2\nu}$
λ, K	λ	$\frac{3}{2}(K - \lambda)$	$\frac{9K(K-\lambda)}{3K-\lambda}$	$\frac{\lambda}{3K-\lambda}$	K
μ, E	$\frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E}$	μ	E	$\frac{E-2\mu}{2\mu}$	$\frac{\mu E}{3(3\mu-E)}$
μ, ν	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$	μ	$2\mu(1 + \nu)$	ν	$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$
μ, K	$K - \frac{2}{3}\mu$	μ	$\frac{9K\mu}{3K+\mu}$	$\frac{3K-2\mu}{6K+2\mu}$	K
E, ν	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	E	ν	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$
E, K	$\frac{3K(3K-E)}{9K-E}$	$\frac{3KE}{9K-E}$	E	$\frac{3K-E}{6K}$	K
ν, K	$\frac{3K\nu}{1+\nu}$	$\frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	$3K(1 - 2\nu)$	ν	K

schreiben.

Werden sowohl Verzerrungs- als auch Spannungstensor nach (3.64) bzw. (4.7) in Deviator und kugelsymmetrischen Anteil aufgespalten, so findet man für den Deviator

$$\tilde{\sigma}_{ij} = 2\mu\tilde{\lambda}_{ij} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\sigma}_{ij} = 2\mu\tilde{\epsilon}_{ij} \quad (5.36)$$

und für den kugelsymmetrischen Anteil

$$\sigma_{kk}\delta_{ij} = (2\mu + 3\lambda)\lambda_{kk}\delta_{ij} = 3K\lambda_{kk}\delta_{ij} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{kk}\delta_{ij} = (2\mu + 3\lambda)\epsilon_{kk}\delta_{ij}, \quad (5.37)$$

d.h. der deviatorische Anteil der Spannung wird von dem deviatorischen Anteil der Verzerrung bewirkt.

5.4 Lineare viskoelastische Materialgleichungen

Es sollen hier auch die Materialgleichungen für ein linear-viskoelastisches Material angegeben werden. Ein viskoelastisches Material zeichnet sich dadurch aus, daß bei ihm, im Gegensatz zum elastischen Material, die momentanen Spannungen nicht nur vom momentanen Deformationszustand, sondern auch von vergangenen Deformationszuständen abhängen.

Mit

$$\sigma_{ij} = 2\mu(0)\epsilon_{ij}(t) + \lambda(0)\epsilon_{kk}(t)\delta_{ij} + \int_0^\infty \{2\mu(s)\epsilon_{ij}(t-s) + \lambda(s)\epsilon_{kk}(t-s)\delta_{ij}\} ds \quad (5.38)$$

haben wir die allgemeine Form der Materialgleichungen eines linear-viskoelastischen Materials angegeben, wobei wir auch hier die Gleichungen wieder für ein homogenes isotropes Material angegeben haben. Die beiden ersten Terme sind dabei identisch zum Hookeschen Gesetz und beschreiben die elastische Antwort des Materials. $\mu(0)$ und $\lambda(0)$ werden als elastische oder unrelaxierte Module bezeichnet. $\mu(s)$ und $\lambda(s)$ beschreiben das Relaxationsverhalten der Module.

Angemerkt werden soll noch, daß für den Erdmantel die tatsächliche Bestimmung der unrelaxierten Größen $\mu(0)$ und $\lambda(0)$ mit Problemen behaftet ist, da hierzu seismische Beobachtungen herangezogen werden, die nur Bestimmungen von $\mu(s)$ und $\lambda(s)$ für Werte von $s > 0$ zulassen. Zur Bestimmung der unrelaxierten Größen müssen deshalb Modelle für das Relaxationsverhalten herangezogen werden.

Bevor wir zu den Materialgleichungen für Flüssigkeiten kommen, soll hier noch der Begriff des viskoelastischen Festkörpers bzw. der viskoelastischen Flüssigkeit eingeführt werden. Dazu betrachten wir ein (eindimensionales) viskoelastisches Medium, das wir einem Spannungssprung aussetzen, so daß

$$\sigma = \sigma_0 H(t), \quad (5.39)$$

wobei $H(t)$ die Heaviside-Funktion ist. Unter dieser Belastung zeigt das Medium ein Kriechverhalten, das durch

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} C(t) \sigma_0 \quad (5.40)$$

beschrieben wird, wobei $C(t)$ die Kriechfunktion ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ erfährt unser Medium eine elastische Dehnung, der ein zunächst transientes Kriechen folgt, das nach einer gewissen Zeit stationär wird. Für die dann wirksame, sogenannte „steady-state“-Viskosität des Mediums gilt

$$\eta_{st} = \frac{\sigma(\infty)}{2\dot{\varepsilon}(\infty)} = \frac{1}{\dot{C}(\infty)}. \quad (5.41)$$

Diese Definition macht natürlich nur Sinn, wenn $\dot{C}(\infty) \neq 0$. Deshalb spricht man von einer viskoelastischen Flüssigkeit, wenn dies erfüllt ist, während man das Medium als viskoelastischen Festkörper bezeichnet, wenn $\dot{C}(\infty) = 0$. Im letzten Fall gilt für den Schermodul, daß $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) > 0$, während im Falle einer Flüssigkeit der Schermodul vollständig relaxiert.

Das Kriechverhalten einer viskoelastischen Flüssigkeit läßt sich für genügend große Zeiten durch stationäres Kriechen beschreiben, und es gilt

$$\sigma(t) = 2\eta_{st}\dot{\varepsilon}(t), \quad t > t_{st}. \quad (5.42)$$

Im Vorgriff auf den nächsten Abschnitt bemerken wir bereits hier, daß dies die (eindimensionale) Materialgleichung einer Newtonschen Flüssigkeit ist, die einen Spezialfall der allgemeineren Stokeschen Fluide darstellt.

5.5 Stokessches Fluid

Als Fluide wollen wir solche Medien bezeichnen, für die der Spannungstensor im ruhenden Zustand ein Kugeltensor ist, d.h. für die im ruhenden Zustand keine deviatorischen Spannungen auftreten. Bei der Behandlung von Fluiden gehen wir deshalb von der Zerlegung des Spannungstensors in einen Kugeltensor und einen Deviator gemäß Gleichung (4.7) aus:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}. \quad (5.43)$$

Es ist nun sinnvoll, eine Klasse von Fluiden zu betrachten, bei denen $\tilde{\sigma}_{ij}$ eine Funktion des Geschwindigkeitsgradienten \dot{F}_{ij} ist, mit $\tilde{\sigma}_{ij} = 0$ für $\dot{F}_{ij} = 0$.

Nun ist

$$\dot{F}_{ij} = \frac{\partial^2 x_i(\xi, t)}{\partial \xi_j \partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial \xi_j}, \quad (5.44)$$

d.h. in symbolischer Schreibweise

$$\dot{\mathbf{F}} = (\text{grad} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{F}. \quad (5.45)$$

Damit ist

$$\tilde{\sigma}_{ij} = f_{ij} \left(\frac{\partial v_m}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial \xi_n} \right). \quad (5.46)$$

Im Gegensatz zum elastischen bzw. viskoelastischen Medium, bei dem die Konfiguration im spannungsfreien, undeformierten Zustand deshalb ausgezeichnet ist, weil das Medium nach jeder Deformation im unbelasteten Fall zu dieser Konfiguration zurückkehrt, gibt es bei einem Fluid keine ausgezeichnete Konfiguration. In einem Fluid sind alle Konfigurationen gleichwertig. Deshalb wählen wir die Momentankonfiguration zur Referenzkonfiguration mit

$$F_{ij} = \delta_{ij}, \quad (5.47)$$

d.h.

$$\tilde{\sigma}_{ij} = f_{ij} \left(\frac{\partial v_m}{\partial x_n} \right) = f_{ij}(L_{mn}), \quad (5.48)$$

wobei L_{ij} der Geschwindigkeitsgradient ist. Auch für dieses Materialgesetz wollen wir wieder Objektivität verlangen. Ebenso wie in Abschnitt 5.1 betrachten wir dazu zwei Beobachter, deren Bezugssysteme gegeneinander bewegt sind. Der bewegte Beobachter sieht den Geschwindigkeitsgradient \hat{L}_{ij} . Aus (5.8) ergibt sich

$$\hat{L}_{ij} = (\hat{F})_{ij}^{\cdot} = \dot{Q}_{il} F_{lj} + Q_{il} \dot{F}_{lj} = (\dot{Q}_{il} + Q_{ik} L_{kl}) F_{lj} = (\dot{Q}_{il} + Q_{ik} L_{kl}) Q_{ml} \hat{F}_{mj}. \quad (5.49)$$

Wegen

$$L_{ij} = \dot{F}_{ij}|_{F_{ij}=\delta_{ij}} \quad (5.50)$$

ist auch

$$\hat{L}_{ij} = (\hat{F})_{ij}^{\cdot}|_{\hat{F}_{ij}=\delta_{ij}} \quad (5.51)$$

womit wir zu

$$\hat{L}_{ij} = \dot{Q}_{il} Q_{jl} + Q_{ik} L_{kl} Q_{jl} \quad (5.52)$$

gelangen. Wir sehen, daß L_{ij} keine objektive Größe ist, denn aufgrund des schiefssymmetrischen Terms $\dot{Q}_{il} Q_{jl}$ sehen die beiden Beobachter jeweils ihren eigenen Geschwindigkeitsgradienten, die sich nicht durch eine Koordinatentransformation ineinander überführen lassen.

Wegen (5.52) sind die Materialgleichungen (5.48) nur dann objektiv, wenn f_{ij} für alle L_{ij} die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$f_{ij}(\dot{Q}_{ml} Q_{nl} + Q_{mk} L_{kl} Q_{nl}) = Q_{il} f_{lk}(L_{mn}) Q_{jk}. \quad (5.53)$$

Spalten wir L_{ij} durch $L_{ij} = D_{ij} + W_{ij}$ in einen symmetrischen Anteil D_{ij} und einen antisymmetrischen Anteil W_{ij} auf, soll läßt sich (5.53) auch als

$$f_{ij}(\dot{Q}_{ml} Q_{nl} + Q_{mk} W_{kl} Q_{nl} + Q_{mk} D_{kl} Q_{nl}) = Q_{il} f_{lk}(L_{mn}) Q_{jk}. \quad (5.54)$$

schreiben. Dies muß insbesondere auch für $Q_{ij} = \delta_{ij}$, $\dot{Q}_{il} Q_{jl} = -W_{ij}$ gelten. In diesem Fall bleibt im Argument von f_{ij} auf der linken Seite nur der Term $Q_{mk} D_{kl} Q_{nl}$ und wir erhalten

$$f_{ij}(L_{nm}) = f_{ij}(D_{nm}), \quad (5.55)$$

was gleichbedeutend damit ist, daß die deviatorischen Spannungen nur vom symmetrischen Anteil D_{ij} des Geschwindigkeitsgradienten abhängen können:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = f_{ij}(D_{ij}). \quad (5.56)$$

Aufgrund der Definition von $D_{ij} = (L_{ij} + L_{ji})/2$ ergibt sich, daß $\hat{D}_{ij} = Q_{il}D_{lk}Q_{jk}$ ist, d.h. daß D_{ij} ein objektiver Tensor ist. Damit erhalten wir aus der Objektivität von f_{ij} sofort $f_{ij}(\hat{D}_{mn}) = f_{ij}(Q_{ml}D_{lk}Q_{nk}) = Q_{il}f_{lk}(D_{mn})Q_{jk}$, d.h. f_{ij} ist eine isotrope Tensorfunktion. Wir müssen hier also im Gegensatz zum elastischen Material die Isotropie nicht fordern, sondern sie ergibt sich aus dem Materialgesetz.

Wie bereits im Abschnitt 5.2 erwähnt, wird die allgemeinste Darstellung einer isotropen Tensorfunktion durch (5.14) gegeben. Die durch das Stoffgesetz

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \phi_0\delta_{ij} + \phi_1D_{ij} + \phi_2D_{ip}D_{pj}, \quad (5.57)$$

beschriebenen Materialien bezeichnet man als Stokesche oder Reiner-Rivlinsche Fluide.

Verlangt man einen linearen Zusammenhang zwischen $\tilde{\sigma}$ und D , so reduziert sich (5.57) auf

$$\tilde{\sigma}_{ij} = 2\eta D_{ij} + \eta_v D_{kk}\delta_{ij} = 2\eta D_{ij} + \eta_v \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \quad (5.58)$$

mit zwei Materialkonstanten η und η_v , wobei dieser Schritt dem Übergang von (5.14) nach (5.18) entspricht.

Die durch (5.58) beschriebenen Materialien werden als Newtonsche Fluide bezeichnet. In der Hydrodynamik werden fast ausschließlich Newtonsche Fluide zugrundegelegt. η und η_v sind die Scher- und Volumenviskosität. Oft wird an Stelle von η_v auch die Druckviskosität $\eta_d = \eta_v + \frac{2}{3}\eta$ verwendet, womit (5.58) in

$$\tilde{\sigma}_{ij} = 2\eta(D_{ij} - \frac{1}{3}D_{kk}\delta_{ij}) + \eta_d D_{kk}\delta_{ij} \quad (5.59)$$

übergeht.

Im folgenden wollen wir zwei Beispiele zur Verdeutlichung dieser Materialgesetze betrachten. Im ersten Beispiel behandeln wir die isotrope Ausdehnung eines Gases (Abb. 5.1).

Es gelte

$$v_i = cx_i.$$

Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} D_{ij} &= c\delta_{ij} \\ D_{kk} &= 3c \\ \tilde{\sigma}_{ij} &= 3\eta_d c\delta_{ij} \text{ und} \\ \sigma_{ij} &= -(p - 3\eta_d c)\delta_{ij}, \end{aligned}$$

d.h. bei der isotropen Ausdehnung eines Gases ergibt sich ein effektiver Druck, bei dem der thermische Druck p um den Betrag $3\eta_d c$ vermindert ist.

Im zweiten Beispiel wollen wir eine Scherströmung betrachten, die in Abb. 5.2 schematisch dargestellt ist.

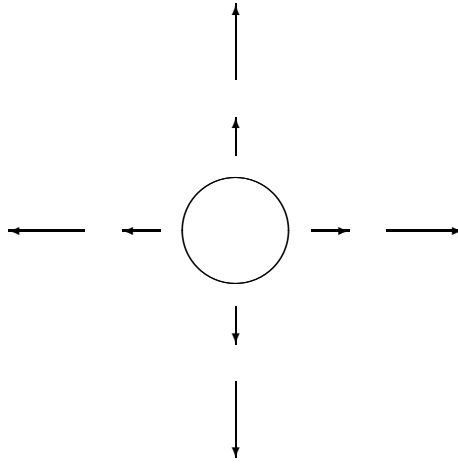


Abbildung 5.1: Isotrope Ausdehnung eines Gases

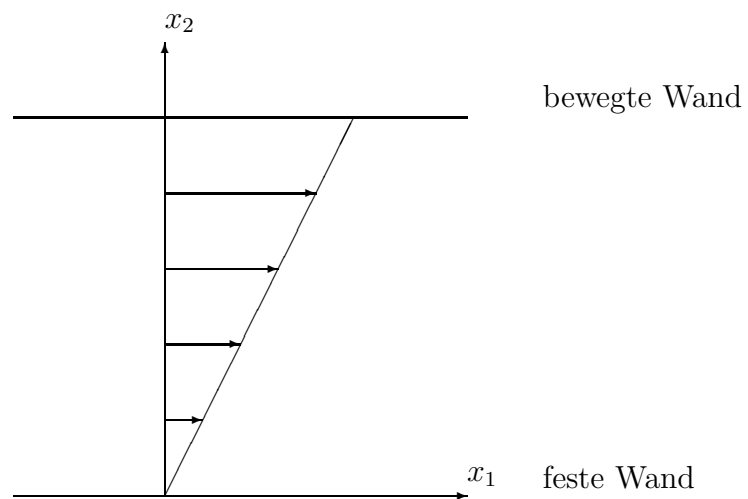


Abbildung 5.2: Schematische Darstellung der Scherströmung.

Für diese Strömung gilt

$$\begin{aligned}v_1 &= cx_2 \\v_2 &= v_3 = 0\end{aligned}$$

und es ergibt sich

$$\begin{aligned}D_{12} &= d_{21} = \frac{c}{2} \\D_{ij} &= 0 \text{ sonst} \\D_{kk} &= 0.\end{aligned}$$

Für ein Newtonsches Fluid erhalten wir somit

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{12} &= \tilde{\sigma}_{21} = \eta c \\ \tilde{\sigma}_{ij} &= 0 \text{ sonst.}\end{aligned}$$

Für ein Stockesches Fluid müssen wir zunächst die Invarianten von D_{ij} berechnen,

$$\begin{aligned}I_1 &= 0 \\ I_2 &= \frac{c^2}{4} \\ I_3 &= 0\end{aligned}$$

und können damit folgern, daß die ϕ_i Funktionen von c^2 sind. Für die zweite Potenz von D_{ij} erhalten wir

$$D_{il}D_{lj} = \begin{cases} \frac{c^2}{4} & : i = j \text{ und } i = 1, 2 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ergibt sich für die deviatorischen Spannungen

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{12} &= \tilde{\sigma}_{21} = \phi_1(c^2)\frac{c}{2} = \eta(c^2)c \\ \tilde{\sigma}_{11} &= \tilde{\sigma}_{22} = \phi_0(c^2) + \phi_2(c^2)\frac{c^2}{4} \\ \tilde{\sigma}_{33} &= \phi_0(c^2).\end{aligned}$$

Wir sehen also, daß die Scherviskosität nun eine Funktion der Schergeschwindigkeit ist, was beim Newtonschen Fluid nicht der Fall war.

Kapitel 6

Thermodynamik

Kapitel 7

Ausgewählte Themen zur Dynamik des Ozeans

Als erste Anwendung der Theorie geophysikalischer Flüssigkeiten wollen wir einige Aspekte der Ozeane betrachten, die für die Dynamik des Gesamtsystems Erde von größter Bedeutung sind. Selbst dann, wenn man mit einer rein mechanischen Betrachtung an den Ozean herangeht, und nur die Meeresoberfläche beobachtet, ergeben sich eine Vielzahl von Beziehungen zu den anderen Gebieten der Geophysik. Abgesehen von modernen Satellitenverfahren wird der Meeresspiegel üblicherweise relative zu einer festen Bezugsmarke auf dem Land gemessen. Die Observable „Relativer Meeresspiegel“ (Englisch „relative sea-level“, RSL) wird einerseits von einer Vielzahl von Faktoren beeinflusst (Tab. ??) und enthält damit auch u.U. wichtige Information über diese Einflußgrößen. Letzteres trifft insbesondere auf die meteorologisch (durch Luftdruck und Windstress) bedingten RSL-Schwankungen zu, die im intersaisonalen Bereich sehr sensitiv auf Veränderungen in der atmosphärischen Anregung reagieren. Die zeitliche Variabilität der intersaisonalen Meeresspiegelvariationen könnte damit einen sehr wichtigen Indikator für Klimaveränderungen darstellen; eine Möglichkeit, die erst in allerneuester Zeit von den Fachleuten diskutiert wird. Andererseits beeinflussen die mit den RSL-Änderungen verbundenen Massenverlagerungen eine Vielzahl geophysikalischer Beobachtungsgrößen (Abb. ??), so daß aus Beobachtungen des RSL diese Einflüsse ermittelt werden müssen. Hervorzuheben sind hier z.B. die Meereszeiten, die über einen direkten Newtonschen Effekt aber auch durch induzierte elastische Deformationen des Erdkörpers (Auflastzeiten) in hochgenaue Schweremessungen und Positionierungen eingehen.

7.1 Zur geophysikalischen Bedeutung des Ozeans

7.2 Der Einfluß der Erdrotation auf die Dynamik des Ozeans

Nicht bei allen Bewegungen im Ozean hat die Erdrotation eine Bedeutung. Man zieht den Einfluß der Rotation zur Klassifizierung der Bewegung heran. Als großräumig werden solche Vorgänge betrachtet, die durch den Einfluß der Rotation dominiert werden.

Abbildung 7.1: Bedeutung der Observablen „Relativer Meeresspiegel“ in der Geophysik
 Der relative Meeresspiegel wird von einer Vielzahl

Ist L die charakteristische horizontale Variation und V die charakteristische horizontale Geschwindigkeit, so wird die Rossby Zahl

$$\varepsilon = \frac{V}{2\Omega L} \quad (7.1)$$

zur Klassifizierung herangezogen, und als großräumig wird ein Vorgang betrachtet, wenn $\varepsilon \leq 1$ ist. Es soll hier bemerkt werden, daß ganz unterschiedliche Längenausdehnungen zu großräumigen Bewegungen führen können. So ist in der Atmosphäre $L = O(1000km)$ und $V = O(20m/s)$, womit wir $\varepsilon \approx 0.14$ erhalten. Im Ozean ist $L = O(50km)$ und $V = O(1m/s)$, was ebenfalls auf $\varepsilon \approx 0.14$ führt.

Neben dem Einfluß der Rotation ist auch die Schichtung aufgrund des thermischen Inputs von grundsätzlicher Bedeutung für die Bewegungsabläufe. Die Schichtung wird mittels der Burger-Zahl

$$S = g \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{D}{4\Omega^2 L^2} \quad (7.2)$$

charakterisiert, wobei D die typische vertikale Ausdehnung des betrachteten Phänomens ist. Definiert man den Rossby-Deformations-Radius als

$$L_D = \frac{1}{2\Omega} \left(g \frac{\Delta\rho}{\rho} D \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.3)$$

so läßt sich die Burger-Zahl als

$$S = \left(\frac{L_D}{L} \right)^2 \quad (7.4)$$

schreiben. Im Ozean und auch in der Atmosphäre ist das Aspect-Ratio

$$\delta = \frac{D}{L} \quad (7.5)$$

sehr klein.

7.3 Eigenmoden des Ozeans

Eigenmoden des Ozeans sind aus zwei Gesichtspunkten heraus von Wichtigkeit: Zum einen stellen die Eigenmoden Resonanzstellen dar, und da Eigenperioden der Ozeanbecken im Bereich der Gezeitenperioden liegen, werden die Ozeangezeiten von Resonanzphänomenen bestimmt. Zum anderen hängt der Einfluß der Ozeane auf die Erdrotation wesentlich von bestimmten Eigenmoden ab. Dementsprechend sind die Eigenmoden der Ozeane auch von zwei verschiedenen Gesichtspunkten her betrachtet worden. Eigenmoden der Ozeane werden überwiegend von Ozeanographen mit der Zielsetzung Gezeiten bzw. meteorologische Anregung betrachtet, wobei hier immer die Beteiligung der festen Erde vernachlässigt wird. Nur in zwei Arbeiten wurde die Wechselwirkung zwischen fester Erde und Ozean bezüglich der Rotation berücksichtigt, wobei hier allerdings der Einfluß des Ozeans auf die Erdrotation im Vordergrund stand.

Herausragend bei der Behandlung der Eigenmoden der Ozeane sind die Arbeiten von Platzman, der in einer langen Reihe von Publikationen dieses Thema seit 1972 bearbeitet. Hier sollen die Grundzüge seiner Herangehensweise zur Lösung dieses Problems kurz skizziert werden.

Platzman (1978) betrachtet einen homogenen Ozean, der sich im quasi-statischen Gleichgewicht befindet, für den er die Massen- und Impulsbilanz betrachtet:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \lambda - \nabla \cdot u \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{\mu} - hg\nabla\xi - f\vec{k} \times \vec{u} + h\vec{B} + \vec{T}, \quad (7.7)$$

wobei ξ die Abweichung der Ozeanoberfläche von Mittel ist, \vec{u} der horizontale Volumentransport (d.h. $h \cdot \vec{v}$ mit \vec{v} der horizontalen Geschwindigkeit), ∇ der sphärische Oberflächengradient, h die Tiefe des Ozeans, g die Schwerkraftbeschleunigung, f der Coriolisparameter und \vec{k} der vertikale Einheitsvektor.

Die externen Kräfte sind in \vec{B} und \vec{T} angegeben, wobei $\rho\vec{B}$ die horizontale Komponente der Volumenkraft und $\rho\vec{T}$ die horizontale Komponente der Oberflächenkraft ist. Für gewöhnlich sind diese Größen durch

$$\vec{B} = \nabla(g\bar{\xi} - \rho^{-1}p_a) \quad \text{und} \quad (7.8)$$

$$\vec{T} = \rho^{-1}(\vec{\tau}_a - \vec{\tau}_b) \quad (7.9)$$

gegeben, wobei $g\bar{\xi}$ das Gezeitenpotential beschreibt, p_a der atmosphärische Druck ist, und $\vec{\tau}_a$ und $\vec{\tau}_b$ Wind- bzw. Bodenstress darstellen.

Die führenden Terme λ und $\vec{\mu}$ auf der rechten Seite der Gleichungen (7.6) und (7.7) sind von Platzman als Residuen eingeführt worden. Alternativ können $\rho\lambda$ bzw. $\rho\vec{\mu}$ auch als Quellen für Masse (z.B. Niederschlag) bzw. Impuls aufgefaßt werden. Will man das Verhalten des Ozeans in Abwesenheit solcher physikalischer Quellen untersuchen, so wird $\lambda = 0$ und $\vec{\mu} = \vec{0}$ gesetzt. Da aber exakte Lösungen numerisch nur schwer erreichbar sind, wird von Platzman die Lösung gesucht, die die Residuen im Mittel klein werden läßt.

Zur Lösung der Gleichungen stehen im Prinzip zwei Wege offen. Man kann einerseits durch die Elimination von \vec{u} das Gleichungssystem (7.6, 7.7) in eine Differentialgleichung höherer Ordnung

überführen. Andererseits kann man direkt von den Gleichungen ausgehen, was den Vorteil hat, daß die Eigenwerte des Systems tatsächlich Eigenfrequenzen sind. Um das System zu lösen, wird \vec{u} nach dem Helmholtzschen Satz in einen divergenz- und einen rotationsfreien Anteil zerlegt, d.h.

$$\vec{u} = \vec{p}(\varphi) + \vec{q}(\psi) \quad (7.10)$$

$$\vec{p}(\varphi) = -h\nabla\varphi \quad (7.11)$$

$$\vec{q}(\psi) = \vec{k} \times \nabla\psi, \quad (7.12)$$

wobei φ das skalare Potential und ψ die vertikale Komponente des Vectorpotentials ist. Im Gegensatz zu den Vektorkomponenten sind diese skalarebn Funktionen unabhängig von der Wahl der Referenzachse.

7.4 Rotation des Systems feste Erde/Ozean

Kapitel 8

Konvektion im Erdmantel